

**Optische Charakterisierung transparenter Materialien  
im Hinblick auf eine Auswertemethode  
experimenteller Streudaten**

**Diplomarbeit**

**Thomas Schmidt**

**Fakultät für Physik  
Albert-Ludwigs Universität Freiburg im Breisgau**

**Fraunhofer Institut  
für solare Energiesysteme**

**Freiburg im Breisgau, im März 1993**

# Inhaltsverzeichnis

<b>0.) Einleitung</b>	4
<b>1.) Die Klassifizierung optisch transparenter Materialien über die charakteristische Streufunktion</b>	6
<b>2.) Die allgemeine, beschreibende Gleichung eines Streuexperiments mit homogenen, optisch dünnen Materialien</b>	
2.1. Das 2-dim Problem	14
2.2. Das 3-dim Problem	17
<b>3.) Die möglichen Meßaufbauten mit zugehörigen Integralgleichungen</b>	
3.1. Parallele, inhomogene Probenbeleuchtung	
3.1.1. Der realisierte Meßaufbau	18
3.1.2. Die beschreibende Integralgleichung	20
3.1.3. Interpretation der Integralgleichung	25
3.1.4. Zusammenfassung	28
3.2. Meßaufbau mit nicht paralleler Probenbeleuchtung	29
<b>4.) Aspekte der Integralgleichung hinsichtlich der Lösungsansätze</b>	
4.1. Beziehung zwischen Volterrascher und Fredholmscher Integralgleichung	31
4.2. Das zugeordnete diskrete Problem	31
4.3. Das Testverfahren der Lösungsansätze	33
<b>5.) Die verschiedenen Ansätze zur Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung</b>	
5.1. Versuch einer analytischen Lösung - Volterras Fehler	37
5.2. Die Lösungsansätze des zugeordneten diskreten Problems	
5.2.1. Matrixinversion	40
5.2.2. Pseudoinverse - Least Square Lösung	44
5.2.3. Regularisierungs Verfahren	51
<b>6.) Kösterelemente als Beispiel für homogene, optisch dünne LIM's des 2-dim Falls</b>	
6.1. Theorie, Klassifikation und Behandlung mit Raytracing-Methoden	57

6.2. Messung des winkelabhängigen Streuverhalten mit anschließender Datenkorrektur	66
6.3. Anwendung der Streudaten in dem Tageslichtsimulations-Programm Radiance	73
<b>7.) Zusammenfassung</b>	76
<b>8.) Anhang</b>	
A) Konsistenzbetrachtung für das Raumwinkel-Integral	77
B) Eine andere Interpretation der Regularisierungs-Methode	79
C) Spiegellamellen mit 1-dim translationsinvarianter Symmetrie	
C.1. Strahlverfolgung	84
C.2. Simulation in Tageslicht-Simulations-Programmen	86
<b>Literaturverzeichnis</b>	91

## 0.) Einleitung

Im Zuge der Erforschung von Systemen zur direkten Umwandlung und Nutzung von Sonnenenergie hat die Entwicklung und Untersuchung von optisch transparenten Einzel-Materialien und Material-Systemen einen immer größeren Stellenwert eingenommen. Nach ihren Verwendungsmöglichkeiten lassen sich diese Materialien in zwei Gruppen einteilen:

Die erste Gruppe bilden die sogenannten **TIM's** (Transparent Insulation Material), die gute Wärmedämmeigenschaften (K-Wert von typischerweise (0.5 -1.5) Watt pro Quadratmeter und pro Kelvin) mit einer hohen diffusen Lichttransmission (Transmissionsgrad 0.5 - 0.8) vereinigen.

Hauptvertreter der **TIM's** sind:

- 1.) Kapillarstrukturen aus Polycarbonat oder Glas
- 2.) Glasschwämme - massives oder granuliertes Aerogel
- 3.) Mehrfach-Scheiben-Folien-Systeme

Mögliche Einsatzgebiete dieser Materialklasse finden sich in Aperturflächen von thermischen Hochtemperatur- sowie Speicherkollektoren, bei saisonalen Wärmespeichern, in Fenstersystemen (Day Lighting) und hauptsächlich bei der transparenten Gebäude-Wärmedämmung.

Die zweite Gruppe bilden die **LIM's** (**L**ight **I**nfluencing **M**aterial<sup>1</sup>), die sich durch gezielte Steuerung der Lichttransmission nach Durchlaßgrad und/oder Richtung auszeichnet. Sie unterteilt sich in die passiven Systeme, die auf bestimmten Licht-Einfallswinkel mit immer gleicher Lichtlenkung reagieren, und die aktiven Systeme, die die Lichtlenkung durch mechanische, thermische oder elektrische Beeinflussung variabel steuern.

Hauptvertreter der **LIM's** sind

bei den passiven Systemen

- 1.) Spiegelemente
- 2.) Linsen und Prismen
- 3.) Hologramme

bei den aktiven Systemen

- 1.) mechanisch bewegbare, passive Systeme
- 2.) thermotrope Schichten
- 3.) elektrochrome Schichten

Diese Materialklasse wird vorwiegend zur gezielten Tageslichtnutzung in Industrie- und Bürogebäuden eingesetzt. Zukünftig sind aber auch die Regelung von transparent, wärmedämmten Fassaden und der Überhitzungsschutz für thermische Kollektoren als Anwendungsmöglichkeit in Betracht zu ziehen.

---

1. Begriff ist in Analogie zu **TIM** gebildet und zwar so, daß sich eine hübsche Abkürzung ergibt ...

Neben dem allgemeinen Forschungsziel der Kostenreduktion sind die Fragestellungen zur Weiterentwicklung und Verbesserung der Materialien bei den verschiedenen Klassen unterschiedlich gelagert:

bei **TIM**'s:

Wie erreicht man hohe solare Transmission bei guter thermischer Wärmedämmung ?

bei **LIM**'s:

Wie erreicht man ein gewünschtes Lichtstreu-und Streuverhalten?

Für beide Fragen sind jedoch die "inneren" Strahlungstransportmechanismen, die sich makroskopisch als "charakteristisches Streuverhalten" der Materialien zeigen, von Bedeutung. (Im folgenden wird jegliche sich makroskopisch zeigende Wechselwirkung des Lichts mit dem jeweiligen Material als Streuung bezeichnet).

Ziel meiner Arbeit war es nun für dieses charakteristische Streuverhalten (d.h. mit welcher Oberflächenabstrahlung in jegliche Raumrichtung ein Material auf Beleuchtung eines Flächenelementes mit Licht aus einem vorgegebenen Einfallswinkelbereich reagiert) eine adäquate, mathematische Beschreibung zu finden und eine damit verbundene Meß-Auswerte-Prozedur für experimentelle Streudaten zu entwickeln. Das damit quantitativ bestimmte Streuverhalten dient einerseits als Test für Theorien der intrinsischen Streuprozesse und andererseits als experimenteller Input für Tageslichtsimulations-Programme.

Als experimenteller Ausgangspunkt stand hierfür ein  $4\pi$ -Detektor mit Doppel-Kegel-Geometrie und angestrebter paralleler, homogener Probenbeleuchtung für Materialien der Größe 40 x 40 cm zu Verfügung.

Der Zusammenhang zwischen Meßwerten und eigentlicher, gesuchter Streufunktion konnte ziemlich schnell als Fredholmsche Integralgleichung formuliert werden. Versuche diese Gleichung auszuwerten, führten über einen Ansatz zur exakten Lösung, Matrixinversion des zugeordneten, diskretisierten Integraloperators und einer Least-Square-Lösung zu der Einsicht, daß es sich hierbei um ein "schlecht gestelltes Problem" handelt, das nur mit Hilfe von Regularisierungsverfahren befriedigend "gelöst" werden kann. Die Erkenntnis, eine Methode zur "Lösung" einer mehrdimensionalen Integralgleichung zur Verfügung zu haben, führte schließlich zu der Idee eines neuen experimentellen Aufbaus mit gezielt divergenter Probenbeleuchtung. Damit kann möglicherweise die Streufunktion für eine bestimmte Untergruppe der optisch transparenten Materialien ohne separate Messungen mit parallel einfallendem Licht bei verschiedenen Einfallswinkeln bestimmt werden.

Parallel zu diesen Arbeiten entstand ein Ray-Tracing-Programm für beliebige, spiegelnde, zweidimensionale Strukturen, daß sowohl die Simulation des Streuverhaltens einzelner, spiegelnder **LIM**'s als auch eines ganzen Meßaufbaus erlaubt und somit ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Kontrolle des entwickelten Auswerte-Formalismus darstellt.

# 1.) Die Klassifizierung optisch transparenter Materialien über die charakteristische Streufunktion

Zur Klassifizierung von optisch transparenten Materialien ergeben sich je nach Zielsetzung mehrere Möglichkeiten. Vom Standpunkt der klassischen Optik würde man die Materialien nach den makroskopischen Wechselwirkungen des Lichts mit Materie, die in ihnen stattfinden, einteilen:

1. spiegelnde Systeme
2. brechende Systeme
3. beugende Systeme

Hinsichtlich des Einsatzes in Systemen zur Nutzung von Solarenergie ist die in der Einleitung erwähnte Einteilung der Materialien nach ihren Verwendungsmöglichkeiten in TIM- und LIM-Klassen sinnvoll. (siehe oben)

Die mathematische Beschreibung der Streueigenschaften und der entwickelte Meßdaten-Auswerte-Formalismus führt jedoch zu einer anderen Klasseneinteilung:

Von Interesse ist die Reaktion des Materials auf elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich von ca. 400 nm - 700 nm (sichtbarer Bereich des Sonnenspektrums), so daß die Beschreibung von Gesamtsystemen wie

Lampe - streuendes Material - Detektor  
Sonne - streuendes Material - Wandflaeche / Absorber

mittels geometrischer Optik ein angemessenes Modell darstellt (Näherung der geometrischen Optik:  $\lambda \ll 1m$ ). Dabei können im Inneren der Materialien durchaus Streuvorgänge ablaufen, die nicht mit der geometrischen Optik beschreibbar sind. Entscheidend ist, daß die Größe des gesamten Streukörpers, der charakterisiert werden soll, wesentlich größer als die Wellenlänge des Lichts im relevanten Spektralbereich ist. Das allgemeinste Streuverhalten eines Materials läßt sich dann folgendermaßen beschreiben:

Ein Flächenelement  $dA_{in}$  an der Stelle  $\vec{x}_{in}$  wird mit polarisiertem, inkohärentem Licht (Polarisationsrichtung  $\vec{P}$  senkrecht oder parallel zur der von  $\vec{n}$  und  $\vec{r}_{in}$  aufgespannten Einfallsebene) der Wellenlänge  $\lambda$  und Lichtintensität  $I_0$  (Lichtleistung pro Raumwinkel  $d\Omega$  und Fläche) aus einer Richtung  $\vec{r}_{in}$  (bezüglich der lokalen Flächennormalen  $\vec{n}_{in}$ ) bestrahlt. Durch interne Streuung entsteht eine charakteristische Abstrahlung  $f(\dots)$  von Licht pro Raumwinkel  $d\Omega$  auf der Materialoberfläche pro Flächenelement  $dA_{aus}$  in die verschiedenen Raumrichtungen  $\vec{r}_{aus}$  (bezüglich der lokalen Flächennormalen  $\vec{n}_{in}$ ).

allgemeine, charakteristische Streufkt. =

$$= f(\{\vec{x}_{in}, \vec{r}_{in}\}, \{\vec{x}_{aus}, \vec{r}_{aus}\}, \{\vec{P}, \lambda\})$$

$$= \frac{\text{abgestrahlter} \cdot \text{Lichtleistungsanteil} \cdot \text{von} \cdot I_0 \cdot \text{in} \cdot \text{Richtung} \cdot \vec{r}_{aus}}{\text{Flaechelement} \cdot dA_{aus} \cdot \text{Raumwinkel} \cdot d\Omega}$$

( Gl. 1.1 )

Dimension von  $f(\dots)$ :

$$[f(\{\hat{x}_{in}, \hat{r}_{in}\}, \{\hat{x}_{aus}, \hat{r}_{aus}\}, \{\vec{P}, \lambda\})] = \frac{1}{m^2 \cdot sr} \quad (\text{Gl. 1.2})$$

Das allgemeinste, spektrale Streuverhalten würde eine Beschreibung mittels orts- und winkelabhängiger Wellenlängenverteilung der gestreuten Strahlung erfordern. Die im interessanten Spektralbereich auftretenden Photonenenergien (im eV-Bereich) sind im wesentlichen aber nur mit elastischen oder quasi elastischen Streuprozessen<sup>1</sup> gekoppelt, die somit keine oder nur vernachlässigbare Frequenzänderungen der Strahlung bewirken. Dadurch ist die spektrale Abhängigkeit von der räumlichen Abhängigkeit des Streuverhaltens getrennt. So kann der unten entwickelte Formalismus bei frequenzunabhängigen Streumaterialien auf spektral integrale Streudaten und bei frequenzabhängigen Streumaterialien einzeln auf die monochromatischen Streudaten angewendet werden.

Für die Abhängigkeit der Streufunktion von der Polarisationsrichtung gilt ähnliches. Die allgemeinste Formulierung müßte orts- und winkelabhängige Anteile der Streufunktion in Abhängigkeit von Polarisationsrichtungen parallel und senkrecht zur Ausfallsebene berücksichtigen. Im praktischen Einsatz (Streuung von Sonnenlicht) interessiert aber nur die Streuung von unpolarisiertem Licht.

Damit ergibt sich eine effektive Streufunktion<sup>2</sup>, die nur von geometrischen Parametern abhängt:

$$f_{eff}(\{\hat{x}_{in}, \hat{r}_{in}\}, \{\hat{x}_{aus}, \hat{r}_{aus}\})$$

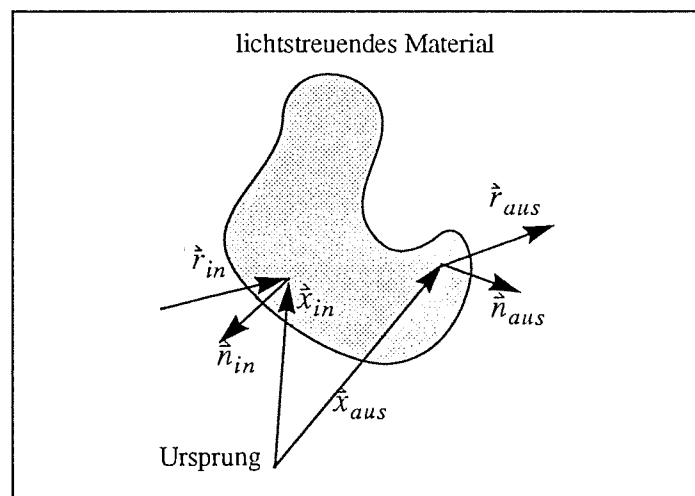


Abb. 1.1  
Darstellung der allgemeinsten Streusituation

1. Die quasielastischen Streuprozesse sind Raman- und Brillouinstreuung, die eine Frequenzänderung von weniger als 1 Prozent bewirken. (siehe [Berg - 77]) Eine Ausnahme hiervon bilden die Fluoreszenzeffekte. Für Materialien in denen solche Effekte eine Rolle spielen ist der hier entwickelte Formalismus der charakteristischen Streufunktion nicht allgemein genug.

2. Im folgenden wird dieses  $f_{eff}$  wieder mit  $f$  bezeichnet.

Es ist zubeachten, daß für die netto Abstrahlung nach außen nur die "konvexe Hülle" des Körpers maßgeblich ist. Dabei handelt es sich um die kleinste, den Streukörper umschließende, virtuelle Fläche, deren gedachte emittierte Strahlung von ihr nicht reabsorbiert wird.

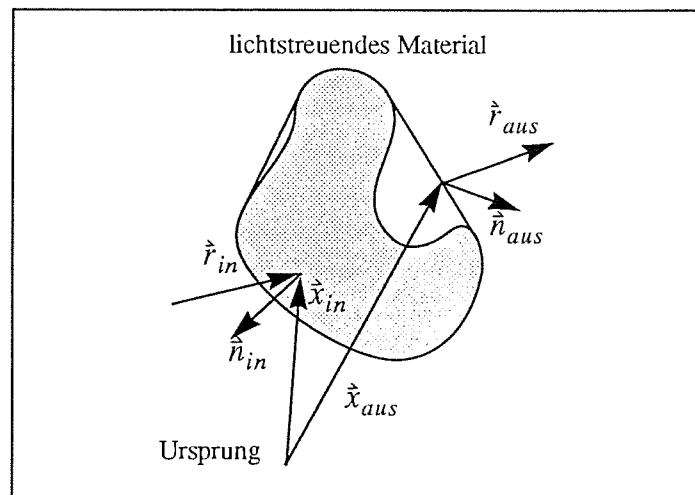


Abb. 1.2  
Die konvexe Hülle eines Streukörpers

Diese oben eingeführte Streufunktion hat folgende Eigenschaft:

$$1.) \quad \text{gestreute} \cdot \text{Strahlungsleistung} \cdot \text{pro} \cdot \text{Raumwinkel} = I_0 \cdot f(\{\hat{x}_{in}, \hat{r}_{in}\}, \{\hat{x}_{aus}, \hat{r}_{aus}\}) \quad (\text{Gl. 1.3})$$

Für nicht zu große Beleuchtungsstärken ist die Intensität der gestreuten Strahlung proportional der Intensität der einfallenden Strahlung. (Bereich der linearen Optik)

$$2.) \quad f_{eff}(\{\hat{x}_{aus}, \hat{r}_{aus}\}) = \frac{\int_{F_{in}} dF_{in} \cdot \int_{\Omega_{in}(\hat{x}_{in})} d\Omega_{in} \cdot f(\{\hat{x}_{in}, \hat{r}_{in}\}, \{\hat{x}_{aus}, \hat{r}_{aus}\})}{F_{in} \cdot \Omega_{in}} \quad (\text{Gl. 1.4})$$

Eine ortsabhängige, divergente Beleuchtung<sup>1</sup> eines ganzen Flächenstücks  $F_{in}$  führt zu einer effektiven Abstrahlung  $f_{eff}(\dots)$  der Streukörper-Fläche. Diese effektive Abstrahlung setzt sich integral aus den Anteilen, die sich bei Einzel-Beleuchtung von kleinen Flächenelementen  $dA_{in}$  ergeben, zusammen.

Die in Solarsystemen eingesetzten Materialien sind quader- bzw. scheibenförmig und damit geometrisch identisch mit ihrer "konvexen Hülle". Für solche scheibenartigen Proben spaltet das Streuproblem in die beiden entkoppelten Fälle der Reflexion und Transmis-

1. Für diesen Punkt ist die Inkohärenz der Lichtquelle entscheidend.



sion auf.<sup>1</sup>

Die Klassifikation der Materialien erfolgt nun über ausgezeichnete Symmetrien im Streuverhalten und die damit verbundene Reduktion der Freiheitsgrade der charakteristischen Streufunktionen:

Das erste Klassifikationskriterium ist die **Homogenität** des Streuers:

Ein **homogenes** Streumaterial reagiert auf gleiche Beleuchtung an unterschiedlichen Orten  $\vec{x}_{in}$  mit gleicher, entsprechend verschobener Abstrahlcharakteristik (siehe Abb. 1.3 und Abb. 1.5). Die Größe der Beleuchtungsfläche ist dabei so zu wählen, daß sie einen materialtypischen Bereich abdeckt. Dieser Bereich entspricht beispielsweise der Querschnittsfläche von Kapillaren bei den Wabenmaterialien oder der projizierten Kugelfläche bei Aerogelen.

Das zweite Klassifikationskriterium ist die "optische Dicke" des Streuers:

Ein **optisch dickes** Streumaterial strahlt durch innere Streuprozesse auch auf Flächenteilen ab, die der Beleuchtungsfläche nicht direkt gegenüberliegen (siehe Abb. 1.4 und Abb. 1.6). **Optisch dünn** impliziert demgegenüber eine lokale Koppelung der Streuprozesse: nur die der Beleuchtungsfläche gegenüberliegende Probenoberfläche emittiert gestreute Strahlung.

Das dritte Klassifikationskriterium ist die **Dimension des Raums** der notwendigen Einfallrichtungen  $\vec{r}_{in}$ :

Im allgemeinen Fall benötigt man Einfallrichtungen aus dem gesamten Beleuchtungshalbraum, um die komplette Information über das winkelabhängige Streuverhalten des jeweiligen Materials zu erhalten. Im folgenden wird dies der 3-dimensionale (**3-dim**) Fall genannt. Eine mögliche Parametrisierung dieser Einfallrichtungen erfolgt durch den Höhenwinkel  $\theta$  und den Azimutwinkel  $\phi$  der Kugelkoordinaten.

Bei einigen Materialien mit ausgezeichneter Symmetrie (z.B. parallele Spiegelstrukturen) enthält das Streuverhalten für Einfallrichtungen in einer ausgezeichneten Ebene implizit die komplette Information für alle Einfallrichtungen. Die gesamte Streufunktion läßt sich dann durch geometrische Überlegungen aus der "reduzierten" Funktion errechnen. Im folgenden wird dies der 2-dimensionale (**2-dim**) Fall genannt. Eine mögliche Parametrisierung dieser Einfallrichtungen erfolgt durch den Polarwinkel  $\theta$  der Polarkoordinaten.

---

1. Alle weiteren Überlegungen beziehen sich auf solche scheibenförmigen Proben, die durch zwei sich gegenüberliegende, planare Flächen begrenzt sind. Bis auf vernachlässigbare Randeffekte erfolgt die Abstrahlung des Materials auf diesen beiden (möglicherweise virtuellen) Begrenzungsflächen. Im folgenden wird die Beleuchtungsfläche Reflexions- und die ihr gegenüberliegende Ebene Transmissionsfläche genannt.

Damit ergeben sich folgende Materialklassen mit zugehörigen Streufunktionen:<sup>1</sup>

1.) homogenes, optisch dünnes Streumaterial

$$f(\dots) = f_{hom \wedge duenn}(\{\theta_{ein}, \varphi_{ein}\}, \{\theta_{aus}, \varphi_{aus}\}) \quad (\text{Gl. 1.5})$$

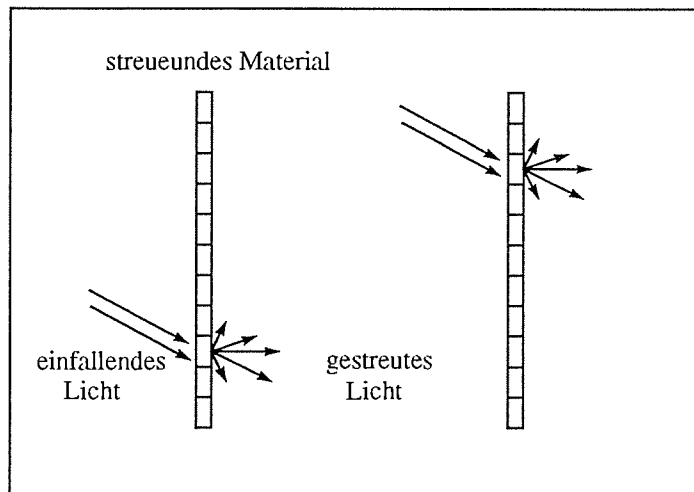


Abb. 1.3  
homogenes, optisch dünnes Material

2.) homogenes, optisch dickes Streumaterial

$$f(\dots) = f_{hom \wedge dick}(\{\theta_{ein}, \varphi_{ein}\}, \{x_{aus}, y_{aus}, \theta_{aus}, \varphi_{aus}\}) \quad (\text{Gl. 1.6})$$

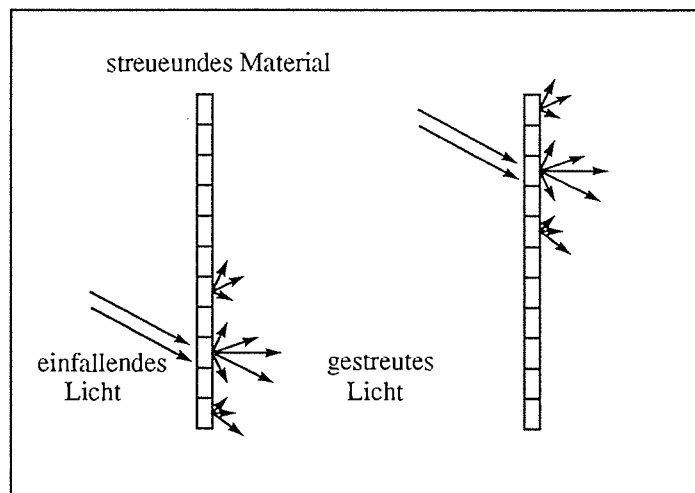


Abb. 1.4  
homogenes, optisch dickes Material

1. Hier sind nur die Abhängigkeiten von  $f(\dots)$  für den allgemeinen 3-dim Fall aufgeschrieben. Die Abhängigkeiten für den 2-dim Fall erhält man durch Ersatz von  $(\theta, \varphi)$  gegen  $(\theta)$ .

3.) inhomogenes, optisch dünnes Streumaterial

$$f(\dots) = f_{inhom \wedge duenn}(\{x_{ein}, y_{ein}, \theta_{ein}, \varphi_{ein}\}, \{\theta_{aus}, \varphi_{aus}\}) \quad (\text{Gl. 1.7})$$

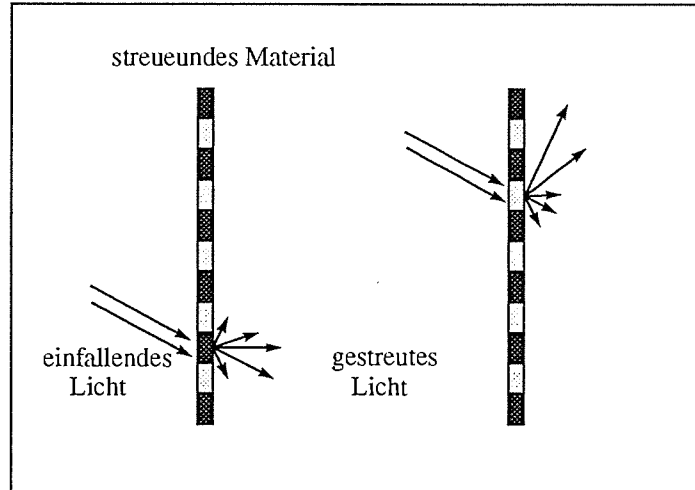


Abb. 1.5  
inhomogenes, optisch dünnes Material

4.) inhomogenes, optisch dickes Streumaterial

$$f(\dots) = f_{inhom \wedge dick}(\{x_{ein}, y_{ein}, \theta_{ein}, \varphi_{ein}\}, \{x_{aus}, y_{aus}, \theta_{aus}, \varphi_{aus}\}) \quad (\text{Gl. 1.8})$$

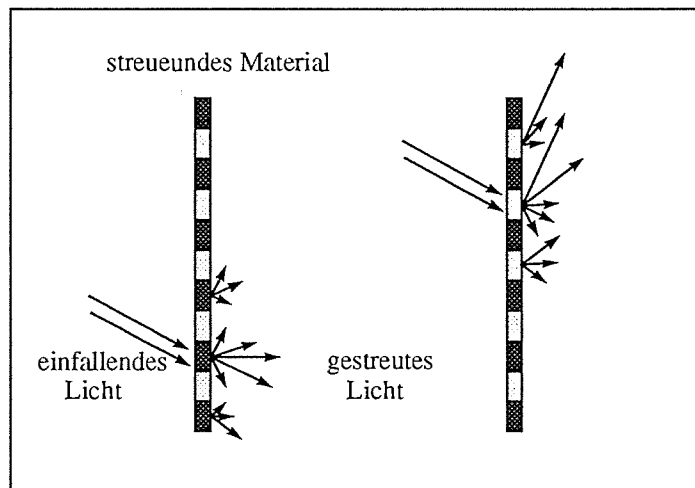


Abb. 1.6  
inhomogenes, optisch dickes Material

$x_{ein}, y_{ein} :$	Ortskoordinaten auf der Beleuchtungsfläche
$\theta_{ein}, \varphi_{ein} :$	Kugelkoordinaten, die die Einfallrichtung der Probenbeleuchtung beschreiben
$x_{aus}, y_{aus} :$	Ortskoordinaten auf der Transmissions- oder Reflexionsfläche
$\theta_{aus}, \varphi_{aus} :$	Kugelkoordinaten, die die Ausfallrichtung der getreuten Strahlung beschreiben

Die meisten TIM's und LIM's können im obigen Sinne als homogen betrachtet werden. Die von ihrer Ausdehnung dicken Materialien sind meistens auch als optisch dick (bis auf spiegelnde Strukturen, die sich durch lokale Reflexionen optisch dünn verhalten), die von ihrer Ausdehnung dünnen als optisch dünn zu klassifizieren. Mit welcher Streufunktion ein bestimmtes Material charakterisiert wird, hängt aber nicht nur von seiner geometrischen Struktur und den inneren Streuprozessen ab. Entscheidend ist auch der Anwendungsbereich der Streufunktion:

Eine differenzierte Theorie des inneren Strahlungstransports wird zu einer einem homogenen, optisch dicken Streumaterial zugeordneten Streufunktion führen, die experimentell zu verifizieren ist. Im Hinblick auf Tageslichtsimulationsprogramme reicht die Beschreibung als homogenes, optisch dünnes Material aber aus.

Die mit diesem Klassifikationsschema eingeführten Streufunktionen führen im allgemeinen zu einem komplexen, mathematischen Formalismus zur Beschreibung und Auswertung der Streudaten eines Materials. Aus diesem Grund beschränkt sich diese Arbeit auf die Entwicklung einer Meß- und Auswerteprozedur für homogenes, optisch dünnes Streumaterial. Dieser Formalismus sollte aber grundsätzlich ohne größere Schwierigkeiten auf den Fall der optisch dicken Streuer übertragbar sein.

## 2.) Die allgemeine, beschreibende Gleichung eines Streuexperiments mit homogenen, optisch dünnen Materialien

Nachdem in Kapitel 1 die charakteristische Streufunktion eingeführt wurde, soll hier der Zusammenhang zwischen dieser einem homogenen, optisch dünnen Material zugeordneten Streufunktion und den experimentell ermittelten Streudaten formuliert werden.

Beim naheliegendsten Verfahren zur Messung der winkelabhängigen Streufunktion beleuchtet man eine endliche Materialprobe mit parallelem und homogenem Licht unter einem bestimmten Einfallswinkel und mißt für interessierende Ausfallswinkel die Intensität der gestreuten Strahlung mittels eines Detektors (z.B. Solarzelle). Diese Meßanordnung führt aber zu experimentellen und konzeptionellen Schwierigkeiten:

- 1.) Die Parallelität der einfallenden Strahlung
- 2.) Die gleichmäßige Probenausleuchtung
- 3.) Der endliche Abstand von Detektor zur Probe

Bei 1.) und 2.) handelt es sich um experimentelle Schwierigkeiten, deren Überwindung größeren technischen Aufwand bedarf.<sup>1</sup> Der endliche Abstand von Detektor zur Probe stellt ein grundsätzliches Problem dar. Um die tatsächliche Abstrahlung der Probe in eine Richtung zu messen, müßte sich der Detektor im Unendlichen befinden. Anderenfalls "sieht" der Detektor abgestrahltes Licht eines ganzen Winkelbereichs.

Ziel dieses Kapitels ist es, diese experimentellen Schwierigkeiten mathematisch exakt zu formulieren und so den Zusammenhang zwischen der gesuchten charakteristischen Streufunktion  $f(\dots)$ <sup>2</sup> und der gemessenen Streuleistung  $P(\dots)$  für reale Messbedingungen darzustellen.

Dies erfolgt getrennt für den 2-dim bzw. 3-dim Fall in 4 Schritten:

- 1.) Berechne die Leistung, die eine endliche Fläche (Linie) A von einem infinitesimalen Flächenelement dF (Linielement dL) mit vorgegebener Abstrahlcharakteristik empfängt.
- 2.) Berücksichtige, daß dF (dL) als optisch dünner Streuer auf eine Einfallswinkelverteilung  $div(\theta_{ein}, \varphi_{ein})$  reagiert.
- 3.) Berücksichtige, daß die Probenfläche F (Probenlinie L) ausgedehnt ist.
- 4.) Beschreibe zusätzlich die Ortsabhängigkeit der Einfallswinkelverteilung  $div(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, x, y)$  und der Beleuchtungsstärke ( $bel(x, y)$ ) auf der Probe.

---

1. Einzelnen kann die Anforderungen nach Homogenität und Parallelität der einfallenden Strahlung prinzipiell beliebig gut erfüllt werden. Gleichzeitige ideale Homogenität und Parallelität scheint aber aus theoretischen Gründen ausgeschlossen zu sein. (Unschärfe-Relation für Photon Transversal-Impuls und Ortsposition auf der Probe) Diese theoretische Grenze spielt aber praktisch keine Rolle.

2. Die Streufunktion für homogene, optisch dünne Materialien wird hier wieder mit f ohne Index bezeichnet.

## 2.1. Das 2-dim Problem

Im 2-dim Fall wird nur ein schmaler Streifen der Probe beleuchtet und alle Einfalls- und Ausfallsrichtungen liegen in einer Ebene. Für die relevanten Größen ergeben sich dann folgende reduzierten Abhängigkeiten:

$$\text{eigentliche Streufunktion} = f(\theta_{ein}, \theta_{aus}) \quad (\text{Gl. 2.1})$$

$$\text{Einfallswinkelverteilung} = \text{div}(\theta_{ein}, x) \quad (\text{Gl. 2.2})$$

$$\text{Probenbeleuchtungsstärke} = \text{bel}(x) \text{ bzw. } \text{bel}_{dL} \quad (\text{Gl. 2.3})$$

Dimensionen:

$$[f(\theta_{ein}, \theta_{aus})] = \frac{1}{m \cdot \text{rad}} \quad (\text{Gl. 2.4})$$

$$[\text{div}(\theta_{ein}, x)] = \frac{1}{\text{rad}} \quad (\text{Gl. 2.5})$$

$$[\text{bel}(x)] = \frac{W}{m} \quad (\text{Gl. 2.6})$$

2.1.1. Leistung pro dL, die die Linie A von Linienelement dL empfängt (siehe dazu auch die Konsistenzüberlegung in Anhang A)

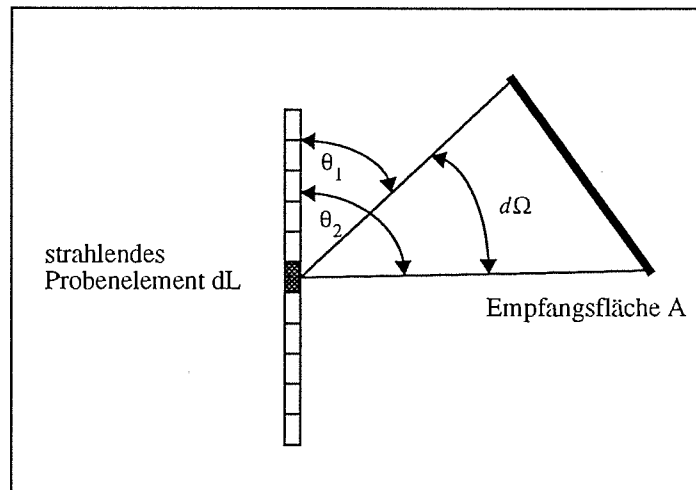


Abb. 2.1  
Leistung  $dL \rightarrow A$

$$\frac{dP_{dL \rightarrow A}(\theta_{ein})}{dL} = \text{bel}_{dL} \cdot \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} d\Omega \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus}) = \text{bel}_{dL} \cdot \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} d\theta_{aus} \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus})$$

$$(\text{Gl. 2.7})$$

$$d\Omega = d\theta_{aus} \quad (\text{Gl. 2.8})$$

2.1.2 Leistung  $P_{dL \leftrightarrow LA}$  pro  $dL$ , die die Linie A durch Streuung der divergenten Einfallstrahlung empfängt

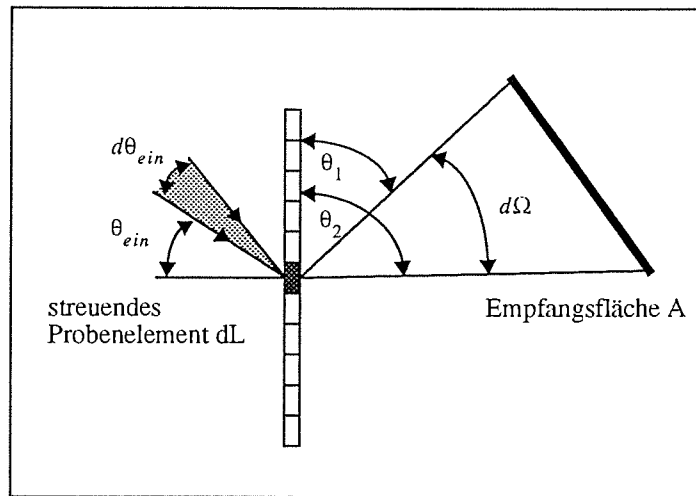


Abb. 2.2  
Leistung  $dL \rightarrow A$  durch Streuung

$$\frac{dP_{dL \rightarrow A}}{dL} = bel_{dL} \cdot \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} d\theta_{aus} \cdot \int_0^\pi d\theta_{ein} \cdot div(\theta_{ein}, x) \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus}) \quad (\text{Gl. 2.9})$$

2.1.3. Berücksichtigung der Ausdehnung der Probe bei homogener Beleuchtung

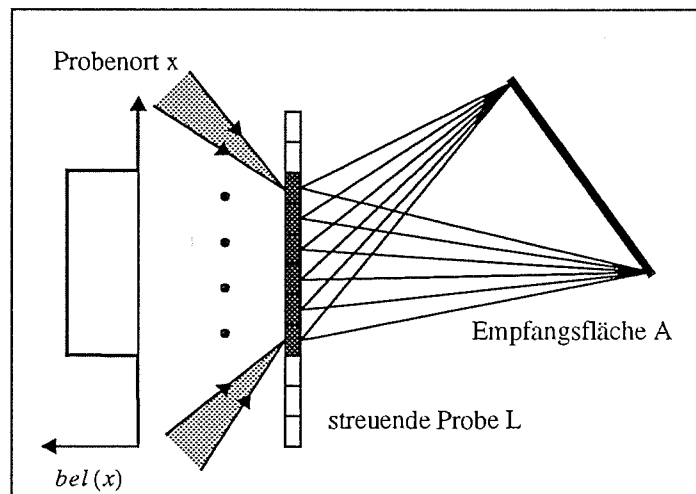


Abb. 2.3  
Leistung  $L \rightarrow A$  durch Streuung  
bei homogener Beleuchtung

$$P_{L \rightarrow A} = \int_{L_{Probe}} dL \cdot \frac{dP_{dL \rightarrow A}}{dL} \quad (\text{Gl. 2.10})$$

## 2.1.4 Berücksichtigung der Ausdehnung der Probe bei inhomogener Beleuchtung

$$P_{L \rightarrow A} = \int_{L_{Probe}} dL \cdot bel(x) \cdot \frac{dP_{dL \rightarrow A}}{dL}$$

$$= \int_{L_{Probe}} dx \cdot bel(x) \cdot \int_{\bar{\theta}_1(x)}^{\bar{\theta}_2(x)} d\theta_{aus} \cdot \int_0^\pi d\theta_{ein} \cdot div(\theta_{ein}, x) \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus})$$

( Gl. 2.11 )

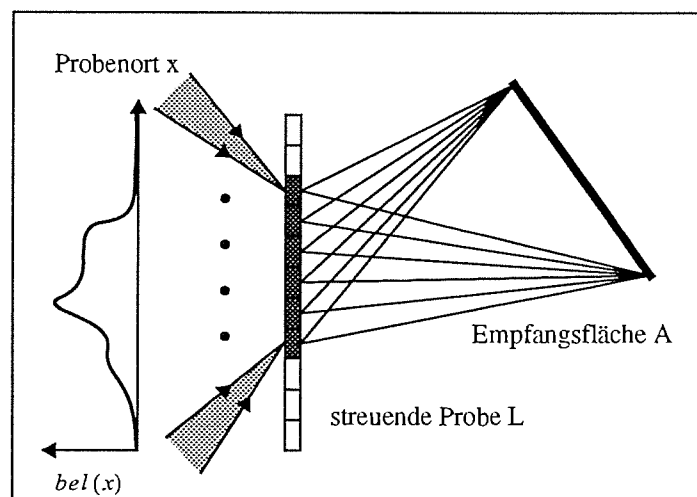


Abb. 2.4

Leistung  $L \rightarrow A$  durch Streuung  
bei inhomogener Beleuchtung

Gleichung 2.11 bildet die Grundlage zur Berechnung der Leistung, die eine "Meßlinie" A von einer über  $f(\theta_{ein}, \theta_{aus})$  charakterisierten streuenden Materialprobe L empfängt.

In einem konkreten Meßaufbau wird nun ein flacher Detektor bestimmter Neigung über eine Mechanik um die streuende Probe geführt und an n Positionen die Beleuchtungsstärke auf dieser "Meßlinie" gemessen.

Der Abstand und die Neigung des Detektors zur Probe fließen indirekt über die Integrationsgrenzen  $\theta_1(x)$  und  $\theta_2(x)$  in die Gleichung ein.

Der konkreten Probenausleuchtung wird über  $bel(x)$  und  $div(\theta_{ein}, x)$  Rechnung getragen.

Vom Standpunkt dieser Gleichung stellt sich die Frage, wie durch einen bestimmten experimentellen Aufbau die Abhängigkeiten der freien Funktionen realisiert werden können, so daß eine einfache Struktur der beschreibenden Gleichung entsteht. Vereinfachung der Struktur würde bedeuten, diese mehrdimensionale Integralgleichung auf eine niederdimensionale Integralgleichung zu bringen. Im Idealfall hieße das, alle Integrationen auszuführen und eine rein algebraische Gleichung zu erhalten, die die gesuchte Streufunktionen mit den



Struktur würde bedeuten, diese mehrdimensionale Integralgleichung auf eine niederdimensionale Integralgleichung zu bringen. Im Idealfall hieße das, alle Integrationen auszuführen und eine rein algebraische Gleichung zu erhalten, die die gesuchte Streufunktionen mit den Meßdaten verknüpft. Dies ist aber wie sich später zeigt für reale Meßaufbauten nicht oder nur als Näherung möglich.

In Kapitel 3 werden die konkreten Ausdrücke für die Grenzwinkel  $\bar{\theta}_1(x)$  und  $\bar{\theta}_2(x)$ , für  $bel(x)$  und  $div(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, x, y)$  entwickelt, die sich für einen Ausbaur mit parallel inhomogener Probenbeleuchtung ergeben.

## 2.2. Das 3-dim Problem

Im 3-dim Fall wird die gesamte Probe beleuchtet und die Einfall- und Ausfallsrichtungen liegen im ganzen Raum. Für die relevanten Größen ergeben sich dann folgende Abhängigkeiten:

$$\text{eigentliche Streufunktion} = f(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, \theta_{aus}, \varphi_{aus}) \quad (\text{Gl. 2.12})$$

$$\text{Einfallswinkelverteilung} = div(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, x, y) \quad (\text{Gl. 2.13})$$

$$\text{Probenbeleuchtungsstärke} = bel(x, y) \quad (\text{Gl. 2.14})$$

Dimensionen:

$$[f(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, \theta_{aus}, \varphi_{aus})] = \frac{1}{m^2 \cdot \text{sterad}} \quad (\text{Gl. 2.15})$$

$$[div(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, x, y)] = \frac{1}{\text{sterad}} \quad (\text{Gl. 2.16})$$

$$[bel(x, y)] = \frac{W}{m^2} \quad (\text{Gl. 2.17})$$

Analog zum 2-dim Fall ist die von der Fläche A empfangene Strahlungsleistung:

$$\begin{aligned} P_{F \rightarrow A} &= \\ &= \int_{-a}^a dx \cdot \int_{-b}^b dy \cdot bel(x, y) \int_{\theta_1}^{\bar{\theta}_2} d\theta_{aus} \cdot \sin(\theta_{aus}) \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi_{aus} \\ &\cdot \int_0^{\pi/2} d\theta_{ein} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{ein} \cdot div(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, x, y) \cdot f(\theta_{ein}, \varphi_{ein}, \theta_{aus}, \varphi_{aus}) \end{aligned} \quad (\text{Gl. 2.18})$$

### 3.) Die möglichen Meßaufbauten mit zugehörigen Integralgleichungen

Die wesentlichen Komponenten eines Aufbaus zur Ermittlung der charakteristischen Streufunktion sind:

- 1.) Die Lichtquelle und zugehörige Optik zur Beleuchtung der Meßprobe
- 2.) Die Meßprobe selbst
- 3.) Der Detektor zur Messung von Lichtintensitäten mit der zugehörigen Mechanik, die ihn auf definiertem Wege um die Probe führt.

#### 3.1 Parallele, inhomogene Probenbeleuchtung

##### 3.1.1. Der realisierte Meßaufbau

Die in diesem Abschnitt beschriebene Meßanordnung stellt den vorhandenen experimentellen Aufbau dar. Abb. 3.1 zeigt die wichtigsten Komponenten des Experiments:

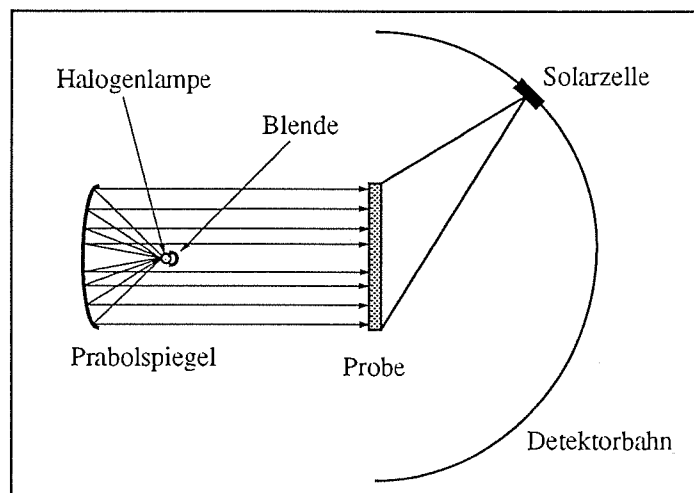


Abb. 3.1  
Prinzipieller Meßaufbau  
mit paralleler, inhomogener Beleuchtung

Eine Halogenlampe wird im Brennpunkt eines paraboloidförmigen Spiegels angebracht. Die Parabelgeometrie läßt ein annähernd paralleles Lichtbündel entstehen. Die Inhomogenität der Lichtleistung über dem Lichtkegelquerschnitt kann bei bekanntem Abstrahlverhalten der Lampe theoretisch berechnet werden. Aus der Unkenntnis über die tatsächliche Beschaffenheit des eingesetzten Spiegels und der Abstrahlcharakteristik der Halogenlampe empfiehlt sich jedoch eine Messung der Probenbeleuchtung. (siehe Kapitel 6)

Als Detektor dient eine Silizium-Solarzelle (2cm x 2cm) mit wechselbarem Filtervorsatz, die auf einer Kreisbahn mit Radius von 1 Meter (mit Mittelpunkt in der Probenmitte) um die zu messende Probe bewegt wird. Die Solarzelle wird über eine Mechanik so ausgerichtet, daß eine in ihrer Mitte platzierte Flächennormale immer auf die Probenmitte zeigt. (siehe Abb. 3.2) Gemessen wird der Solarzellen-Kurzschlußstrom, der bei den auftretenden Beleuchtungsstärken (typischerweise 1 Watt pro Quadratmeter entspricht einem Kurzschlußstrom von 1 Milli-Ampere) in guter Näherung proportional zur Lichtintensität ist.

Die Signalverarbeitung und Steuerung der Motoren erfolgt durch eine Unix-Workstation erfolgt über einen VME- bzw. HPIB-Bus. (siehe Abb. 3.3) Weitere Details zum Aufbau finden sich bei [Apian - 90].

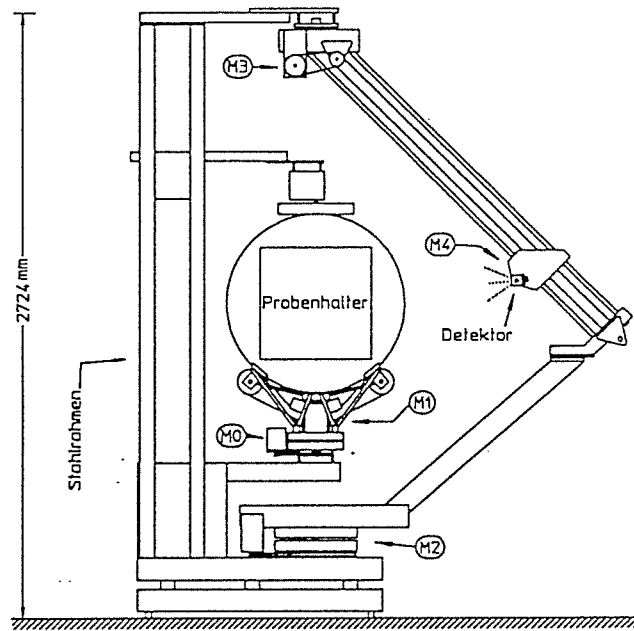


Abb. 3.2  
Gesamtzeichnung des mechanischen Aufbaus  
der Meßapparatur

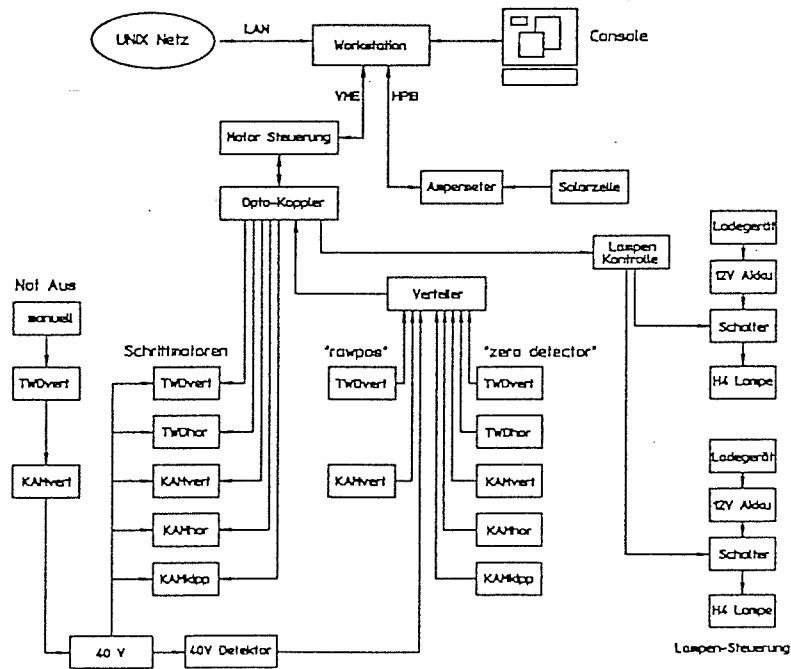


Abb. 3.3  
Schematischer Gesamtschaltplan  
für die Motorsteuerung und die Signalverarbeitung

### 3.1.2. Die beschreibende Integralgleichung

Die in Kapitel 2 formulierte Gleichung wird nun für diesen speziellen Meßaufbau ausgewertet.

Die wichtigsten, im folgenden auftretenden Größen:

$b$  : halbe Probenbreite

$c$  : halbe Solarzellenbreite

$x$  : Position auf der Probe

$r(\theta)$  : Abstand von der Solarzelle zur Probenmitte

$\bar{r}(\theta, x)$  : Abstand eines Probenelements an der Position  $x$  zur Detektormitte

$\theta$  : Winkel, der die Detektorposition festlegt

$\bar{\theta}(\theta, x)$  : Winkel unter dem der Detektor ein Probenelement am Ort  $x$  sieht

$\theta_{1,2}(\theta)$  : Grenzwinkel unter dem der Detektor an Position  $\theta$  die Probe sieht

$\bar{\theta}_{1,2}(\theta, x)$  : Grenzwinkel unter dem ein Probenelement die Solarzelle sieht

$\gamma_{1,2}(\theta, x)$  : Raumwinkel unter dem ein Probenelement die Solarzelle sieht

$bel(x)$  : Beleuchtungsstärke am Probenort

$div(\theta_{ein}, x)$  : Winkelverteilung der einfallenden Strahlen am Ort  $x$

Zunächst ergibt sich aus der parallelen Probenbeleuchtung unter einem Winkel von  $\theta_0$ :

$$div(\theta_{ein}, x) = \delta(\theta_{ein} - \theta_0) \quad (\text{Gl. 3.1})$$

$\delta(\dots)$  ist Dirac'sche Deltafunktion, die in diesem Fall ausdrückt, daß das einfallende Licht nur unter einem bestimmten Winkel  $\theta_0$  auf die Probe fällt. Entsprechend liefert die Deltafunktion nur einen Beitrag für  $\theta_{ein} = \theta_0$  und ist für alle Winkel  $\theta_{ein} \neq \theta_0$  gleich null.

Die Beleuchtungsstärke  $bel(x)$  wird wie oben erwähnt experimentell bestimmt (siehe unten).

Für die Winkel unter denen der Detektor die Probenelemente sieht, gelten folgende Beziehungen (Gl. 3.2 bis 3.10; siehe Abbildung 3.4.):

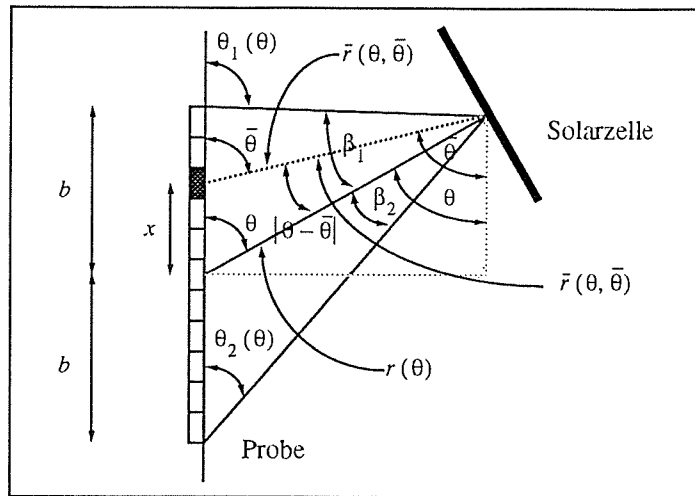


Abb. 3.4  
Raumwinkel: Solarzelle  $\rightarrow$  Probe

$$\sin \theta \cdot r(\theta) = \sin \bar{\theta} \cdot \bar{r}(\theta, \bar{\theta}) \quad (\text{Gl. 3.2})$$

Aus dem Sinussatz angewendet auf das von den Seiten  $b$ ,  $r(\theta)$  und  $\bar{r}(\theta, \theta_{1,2})$  gebildete Dreieck folgt:

$$\frac{\sin(\beta_{1,2})}{b} = \frac{\sin(\pi - \theta_{1,2})}{r(\theta)} = \frac{\sin(\theta_{1,2})}{r(\theta)} \quad (\text{Gl. 3.3})$$

Desweiteren folgt aus dem Sinussatz für das von den Seiten  $x$ ,  $r(\theta)$  und  $\bar{r}(\theta, \bar{\theta})$  gebildete Dreieck:

$$\frac{\sin \theta}{\bar{r}(\theta, \bar{\theta})} = \frac{\sin|\bar{\theta} - \theta|}{|x|} = \frac{\sin(\bar{\theta} - \theta)}{x} \quad (\text{Gl. 3.4})$$

Außerdem gilt:

$$\theta_{1,2} = \theta \pm \beta_{1,2} \quad (\text{Gl. 3.5})$$

und damit

$$\sin \theta_{1,2} = \sin(\theta \pm \beta_{1,2}) \quad (\text{Gl. 3.6})$$

Kombiniert man Gleichung Gl. 3.4 mit Gl. 3.5 unter Berücksichtigung von

$$\sin(\theta \pm \beta_{1,2}) = \sin(\theta) \cdot \cos(\beta_{1,2}) \pm (\cos(\theta) \cdot \sin(\beta_{1,2})) \quad (\text{Gl. 3.7})$$

und

$$\cos^2 \beta_{1,2} = 1 - \sin^2 \beta_{1,2} \quad (\text{Gl. 3.8})$$

ergibt sich eine quadratische Gleichung für  $\sin(\beta_{1,2})$  mit den Lösungen

$$|\sin(\beta_{1,2})| = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 \mp 2\frac{r}{b}\cos\theta + \frac{r^2}{b^2}}} \quad (\text{Gl. 3.9})$$

und damit unter Berücksichtigung von Gl. 3.3 für  $\sin(\theta_{1,2})$ :

$$|\sin(\theta_{1,2})| = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 \mp 2\frac{b}{r}\cos\theta + \frac{b^2}{r^2}}} \quad (\text{Gl. 3.10})$$

Für die Winkel unter denen die Probeelemente den Detektor sehen, gelten analog die folgenden Beziehungen (Gl 3.11 bis 3.17 ;siehe Abbildung 3.5):

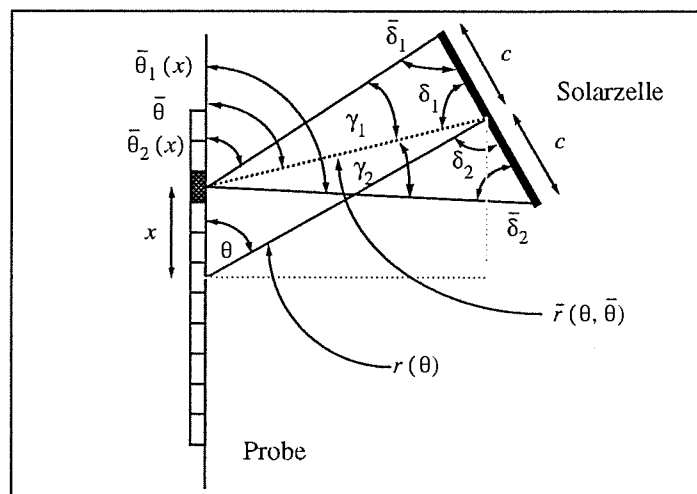


Abb. 3.5  
Raumwinkel: Probe → Solarzelle

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta} + \theta \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} + \bar{\theta} - \theta \quad (\text{Gl. 3.11})$$

$$\pi = \delta_{1,2} + \gamma_{1,2} + \varepsilon_{1,2} \quad (\text{Gl. 3.12})$$

$$\frac{\sin\gamma_{1,2}}{c} = \frac{\sin\delta_{1,2}}{\bar{r}(\theta, \bar{\theta})} \quad (\text{Gl. 3.13})$$

Analog zu Gl. 3.5 ergibt die Kombination von Gl. 3.11 bis 3.13 eine quadratische Gleichung für  $\sin\gamma_{1,2}$  mit der Lösung:

$$|\sin\gamma_{1,2}| = \frac{\cos(\bar{\theta} - \theta)}{\sqrt{1 \pm 2 \frac{\bar{r}(\theta, \bar{\theta})}{c} \sin(\bar{\theta} - \theta) + \frac{(\bar{r}(\theta, \bar{\theta}))^2}{c^2}}} \quad (\text{Gl. 3.14})$$

Unter Verwendung von Gl. 3.2 erhält man schließlich :

$$|\sin\gamma_{1,2}| = \frac{\cos(\bar{\theta} - \theta)}{\sqrt{1 \pm 2 \frac{r(\theta) \sin\theta}{c \cdot \sin\bar{\theta}} \sin(\bar{\theta} - \theta) + \left(\frac{r(\theta) \sin\theta}{c \cdot \sin\bar{\theta}}\right)^2}} \quad (\text{Gl. 3.15})$$

Man beachte, daß sich für den Fall  $\bar{\theta} = \theta$  Gl. 3.15 vereinfacht zu

$$|\sin\gamma_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r(\theta)}{c}\right)^2}} \quad (\text{Gl. 3.16})$$

was konsistent ist mit den Gleichungen für das in diesem Fall rechtwinklige Dreieck mit den Katheten  $r(\theta)$ ,  $c$  und der Hypotenuse  $c/(\sin\gamma_{1,2})$ .

Man erhält dann für die Grenzwinkel  $\bar{\theta}_{1,2}$  unter denen ein Probenelement an der Position  $x$  die Solarzelle sieht:

$$\bar{\theta}_{1,2} = \bar{\theta}(x, \theta) \mp |\gamma_{1,2}| \quad (\text{Gl. 3.17})$$

Damit sind alle Größen zur Auswertung für Gl. 2.11 bekannt:

$$\begin{aligned} P_{L \rightarrow LA}(\theta) &= \int_{L_{Probe}} dx \cdot bel(x) \cdot \int_{\bar{\theta}_1(\theta, x)}^{\bar{\theta}_2(\theta, x)} d\theta_{aus} \cdot \int_0^\pi d\theta_{ein} \cdot div(\theta_{ein}, x) \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus}) \\ &= \int_{-b}^b dx \cdot bel(x) \cdot \int_{(\bar{\theta}(x, \theta) - |\gamma_1|)}^{(\bar{\theta}(x, \theta) + |\gamma_2|)} d\theta_{aus} \cdot \int_0^\pi d\theta_{ein} \cdot \delta(\theta_{ein} - \theta_0) \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus}) \end{aligned}$$

Die Deltafunktion kann ausgewertet werden, da immer  $\theta_0 \in [0, \pi]$  gilt:

$$= \int_{-b}^b dx \cdot bel(x) \cdot \int_{(\bar{\theta}(x, \theta) - |\gamma_1|)}^{(\bar{\theta}(x, \theta) + |\gamma_2|)} d\theta_{aus} \cdot f(\theta_0, \theta_{aus}) \quad (\text{Gl. 3.18})$$

Da die Detektorausdehnung  $c$  sehr klein gegenüber dem Abstand  $r(\theta)$  ist, ergeben sich sehr kleine Werte für  $|\gamma_{1,2}|$ . Bei den oben genannten Dimensionen des Meßaufbaus gilt:

$$|\gamma_{1,2}| \approx 0.02 \text{ rad} \approx 0.003 \cdot 2\pi \cdot \text{rad}$$

Daher kann die Integration über  $d\theta_{aus}$  genähert werden:<sup>1</sup>

$$P_{L \rightarrow LA}(\theta) = \int_{-b}^b dx \cdot bel(x) \cdot (|\gamma_1| + |\gamma_2|) \cdot f(\theta_0, \bar{\theta}(x, \theta)) \quad (\text{Gl. 3.19})$$

Für die spätere Auswertung der Integralgleichung ist es wichtig, die Integrationsvariable an die im Argument von  $f(\dots)$  auftretende Variable  $\bar{\theta}(x, \theta)$  anzupassen. Dazu ist eine Transformation der Integrationsvariablen nötig. Den Zusammenhang zwischen  $\bar{\theta}$  und  $x$  liefert Gl. 3.4:

$$x(\theta, \bar{\theta}) = \sin(\bar{\theta} - \theta) \cdot \frac{\bar{r}(\theta, x)}{\sin\theta}$$

und damit erhält man durch Verwendung von Gl. 3.2:

$$x(\theta, \bar{\theta}) = \sin(\bar{\theta} - \theta) \cdot \frac{r(\theta)}{\sin\bar{\theta}} \quad (\text{Gl. 3.20})$$

Damit folgt für die Ableitung nach  $\bar{\theta}$

$$\frac{dx}{d\bar{\theta}} = r(\theta) \cdot \frac{\cos(\bar{\theta} - \theta) \cdot \sin\bar{\theta} - (\sin(\bar{\theta} - \theta) \cdot \cos\bar{\theta})}{(\sin\bar{\theta})^2} \quad (\text{Gl. 3.21})$$

Über die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - (\cos\alpha \cdot \sin\beta) \quad (\text{Gl. 3.22})$$

und

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (\text{Gl. 3.23})$$

der trigonometrischen Funktionen zeigt man

$$\cos(\bar{\theta} - \theta) \cdot \sin\bar{\theta} - (\sin(\bar{\theta} - \theta) \cdot \cos\bar{\theta}) = \dots = \sin\theta \quad (\text{Gl. 3.24})$$

---

1. Trotz der Integralnäherung wird auch in Zukunft das Gleichheitszeichen verwendet, da der Fehler vernachlässigbar ist.



Damit ergibt sich folgende Transformation für die Koordinatendifferentiale:

$$dx = d\bar{\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{(\sin\bar{\theta})^2} \cdot r(\theta) \quad (\text{Gl. 3.25})$$

und daraus schließlich die vollständige Integralgleichung mit transformierter Integrationsvariable  $\bar{\theta}$  und Integrationsgrenzen  $\bar{\theta}_{1,2}(\theta)$ :

$$P_{L \rightarrow LA}(\theta) = \int_{\bar{\theta}_1(\theta)}^{\bar{\theta}_2(\theta)} d\bar{\theta} \cdot bel(x(\theta, \bar{\theta})) \cdot \frac{\sin\theta}{(\sin\bar{\theta})^2} \cdot r(\theta) \cdot (|\gamma_1(\theta, \bar{\theta})| + |\gamma_2(\theta, \bar{\theta})|) \cdot f_{\theta_0}(\bar{\theta})$$

( Gl. 3.26 )

Man beachte, daß diese Gleichung für alle möglichen Wege (parametrisiert durch  $r(\theta)$ ) eines flachen Detektors um eine Probe gültig ist, sofern nur seine Ausdehnung klein ist verglichen mit dem Abstand zur Probe und seine Normale bei jeder Meßposition auf die Probenmitte zeigt.

Durch die parallele Beleuchtung und die diese beschreibende Deltafunktion wurde Gl. 3.2 um eine Integration reduziert und eine Entkopplung der Streufunktionen für verschiedene Einfallswinkel erreicht (bei der charakteristischen Streufunktion taucht  $\theta_0$  nur noch als äußerer Parameter auf). Die zweite Reduktion des Integrals erfolgte durch die Näherung der Integration über den Detektorraumwinkel. Die noch verbleibende Integration beschreibt den Einfluß des endlichen Raumwinkels unter dem der Detektor die Probe bedingt durch seinen nicht unendlichen Abstand zu dieser sieht. Experimentell könnte dieser Einfluß nur durch ein großen Abstand des Detektors zur Probe reduziert werden, was praktisch zu großen, unhandlichen Aufbauten führen würde.

### 3.1.3. Interpretation der Integralgleichung

Die anschauliche Interpretation dieser Gleichung ist die folgende:

Ein Meßsignal bei einer Detektorposition  $\theta$  resultiert nicht nur durch Strahlung, die die einzelnen Probenelemente in Richtung  $\theta$  abstrahlen. Tatsächlich empfängt der Detektor nur von der Probenmitte abgestrahltes Licht des Winkels  $\theta$ . Von allen anderen Probenteilen erreicht den Detektor nur Strahlung unter anderen Winkeln. Der entsprechende Winkelbereich variiert gerade zwischen  $\bar{\theta}_1(\theta)$  und  $\bar{\theta}_2(\theta)$ . Die Gleichung 3.17 beschreibt, wie sich das gemessene Signal additiv aus den Einzelabstrahlungen in diesem Winkelbereich zusammensetzt.

Der Integralkern wichtet die Einzelanteile:

1.)  $bel(x(\theta, \bar{\theta}))$

Der erste Wichtungsfaktor ist die Probenbeleuchtung. Da jeder Probenort direkt mit einem entsprechenden Abstrahlwinkel zum Detektor gekoppelt ist, muß dementsprechend auch die Abstrahlrichtung mit der Abstrahlintensität dieses Probenortes gewichtet werden. An

dieser Stelle fließt maßgeblich ein, daß es sich um optisch dünnes Streumaterial handelt, so daß die Abstrahlintensität direkt proportional zur Beleuchtungsstärke am entsprechenden Probenort ist.

$$2.) \quad \frac{\sin \theta}{(\sin \bar{\theta})^2} \cdot r(\theta)$$

Der zweite Faktor wichtet die Winkel nach den Anteilen der Probe, die Licht in einem Winkelbereich zwischen  $\bar{\theta}$  und  $\bar{\theta} + d\bar{\theta}$  in Richtung des Detektors senden. Je näher der Winkel an  $\pi/2$  heranrückt (d. h. der Verbindungsstrahl zwischen Detektor und Probenstück steht senkrecht auf der Probe), um so kleiner wird der zugehörige Gewichtungsfaktor. Entsprechend divergiert der Anteil für Strahlen deren Winkel in die Nähe von 0 bzw.  $\pi$  rückt.

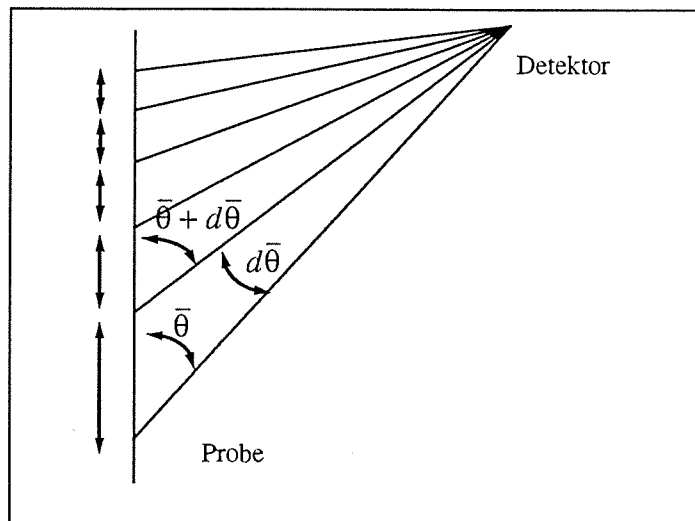


Abb. 3.6  
Darstellung der Probenanteile,  
die in gleich großen Raumwinkelbereichen liegen

$$3.) \quad |\gamma_1(\theta, \bar{\theta})| + |\gamma_2(\theta, \bar{\theta})|$$

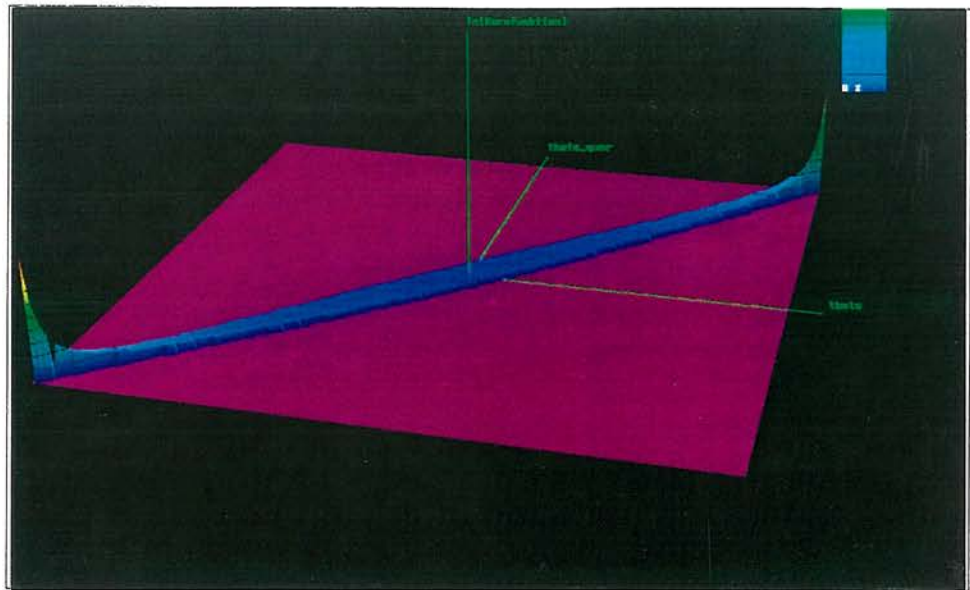
Die bisherigen Faktoren ließen die Größe und Ausrichtung des Detektors unberücksichtigt. Diesem Punkt wird durch das Gewicht  $|\gamma_1(\theta, \bar{\theta})| + |\gamma_2(\theta, \bar{\theta})|$  Rechnung getragen. Dies ist der Raumwinkel unter dem ein Probenelement den Detektor aufgrund seiner Neigung und Größe sieht. Die in diesem Zusammenhang durchgeführte Integralnäherung bedeutet physikalisch, daß sich die Abstrahlung des Probenstücks in diesem Winkelbereich nicht ändert.

Die Integrationsgrenzen tragen der endlichen Probenausdehnung Rechnung, die zu einem endlichen Raumwinkelbereich führt, unter dem der Detektor die Probe sieht.. Man beachte das Konvergenzverhalten:

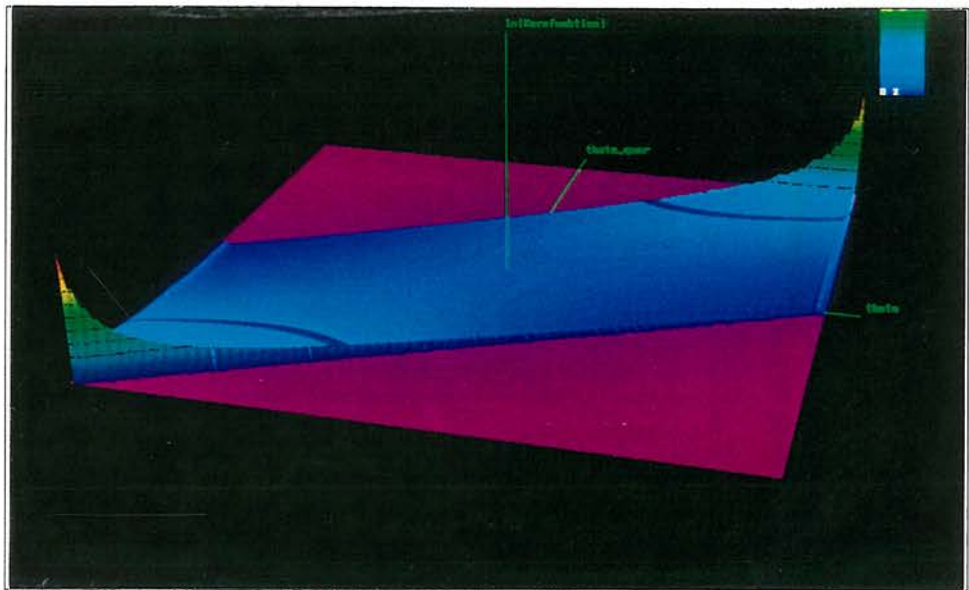
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \theta_{1,2}(\theta) = \theta \quad (\text{Gl. 3.27})$$

Dies spiegelt den oben beschriebenen Sachverhalt wieder, daß für große Abstände der Detektor die Probe unter einem immer kleineren Raumwinkelbereich sieht. Im Grenzfall nur noch unter dem Winkel der seiner Position zur Probe entspricht.

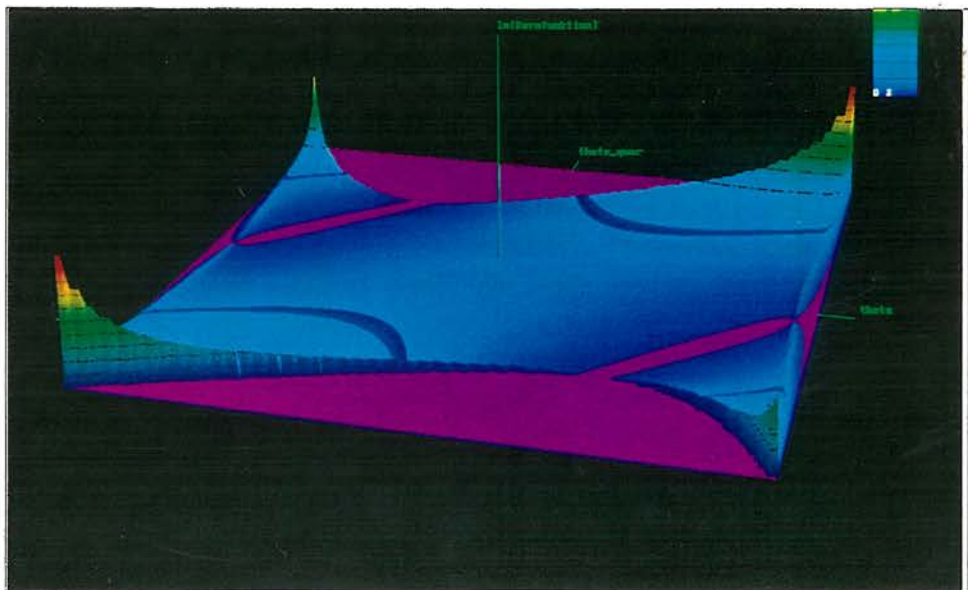
Darstellung der Integral-Kernfunktionen für verschiedene Detektorradien



$r = 100\text{cm}$   
 $b = 16\text{cm}$   
Abb. 3.7



$r = 16\text{cm}$   
 $b = 16\text{cm}$   
Abb. 3.8



$r = 10\text{cm}$   
 $b = 16\text{cm}$   
Abb. 3.9

In Abb 3.7 ist die gesamte dem realisierten Aufbau zugeordnete Kernfunktion unter Berücksichtigung der Integrationsgrenzen dargestellt.  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  variieren dabei im Bereich von 0 bis  $\pi$ . Abb. 3.8 und 3.9 zeigen die Kernfunktion für hypothetische Aufbauten mit anderen Meßradien. In Abb. 3.8 ist der Detektorradius so groß wie die halbe Probenbreite. Daraus resultiert, daß die Solarzelle die Probe an jeder Position unter einem Winkel von  $\pi/2$  sieht. Dies entspricht dem Sachverhalt, den der Satz von Thales beschreibt. (siehe das "Gebirge" konstanter Breite in Abb. 3.8) Der Detektorradius in Abb. 3.9 ist kleiner als die halbe Probenbreite. Zusätzlich zu dem Sichtwinkel  $\pi/2$  an jeder Meßposition empfängt die Solarzellenrückseite in einem bestimmten Bereich noch Strahlung von Probenteilen außerhalb des Meßradius.

### 3.1.4. Zusammenfassung

Die beschreibenden Gleichungen für einen Meßaufbau mit parallel, inhomogener Beleuchtung homogener, optischer Materialien für den 2-dim Fall sind:<sup>1</sup>

$$P_{\theta_0}(\theta) = \int_{\theta_1(\theta)}^{\theta_2(\theta)} d\bar{\theta} \cdot g(\theta, \bar{\theta}) \cdot f_{\theta_0}(\bar{\theta}) \quad (\text{Gl. 3.28})$$

$$g(\theta, \bar{\theta}) = \text{bel}(x(\theta, \bar{\theta})) \cdot \frac{\sin\theta}{(\sin\bar{\theta})^2} \cdot r(\theta) \cdot (|\gamma_1(\theta, \bar{\theta})| + |\gamma_2(\theta, \bar{\theta})|)$$

$$|\sin\gamma_{1,2}| = \frac{\cos(\bar{\theta} - \theta)}{\sqrt{1 \pm 2 \frac{r(\theta) \sin\theta}{c \cdot \sin\bar{\theta}} \sin(\bar{\theta} - \theta) + \left(\frac{r(\theta) \sin\theta}{c \cdot \sin\bar{\theta}}\right)^2}}$$

$$|\sin(\theta_{1,2})| = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 \mp 2 \frac{b}{r(\theta)} \cos\theta + \frac{b^2}{(r(\theta))^2}}}$$

Damit ist die mit einem Detektor gemessenen Streuleistung über eine Integralgleichung mit der charakteristischen Streufunktion verknüpft. Es ist zu beachten, daß diese Beschreibung ein winkelabhängiges Detektionsverhalten der Meßzelle als auch Nicht-Linearitäten der Auswerteelektronik ( Verstärker, Analogdigitalwandler ... ) unberücksichtigt läßt. Sollte dies bei realisierten Aufbauten eine maßgebliche Rolle spielen, sind entsprechende Korrekturterme einzufügen.

Das Problem der Bestimmung der Streufunktion aus den Streudaten ist damit auf die Entwicklung eines stabilen, mathematischen Auswerteverfahren dieser Integralgleichung zurückgeführt.

1.  $P_{L \rightarrow LA}$  wird in den weiteren Kapiteln immer nur noch mit  $P$  bezeichnet.

### 3.2. Meßaufbau mit nicht paralleler Probenbeleuchtung

Der in 3.1. eingeführte Meßaufbau mit paralleler, inhomogener Beleuchtung ist der nahe-  
 liegendste Aufbau zur Bestimmung der charakteristischen Streufunktion. Dieser Aufbau  
 führte durch die die parallele Beleuchtung beschreibende Deltafunktion zu einer Entkopp-  
 lung der Gleichungen für verschiedenen Einfallswinkel. Da aber die oben eingeführten  
 Gleichungen eine Berücksichtigung von divergenter Beleuchtung erlauben, entstand die  
 Idee für alternative Meßaufbauten, die zu einer berechenbaren Strahldivergenz führen.  
 Denkbar sind im wesentlichen Aufbauten, die dann zu folgenden  $div(\bar{\theta}, x)$  Funktionen  
 und den damit verbundenen Ausdrücken für die gemessene Leistung führen (nach Gleichung 2.11):

- 1.) Punktförmige Lichtquelle mit isotroper Abstrahlung in definiertem Abstand  $d$  zur Probe

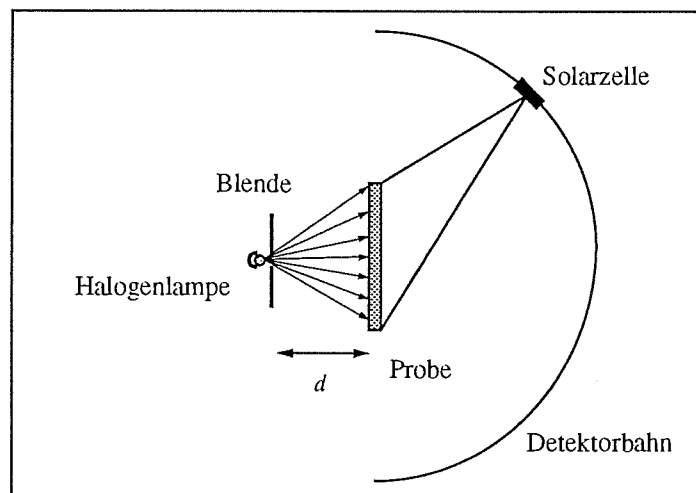


Abb. 3.7  
 Meßaufbau mit gezielt divergenter,  
 inhomogener Beleuchtung

$$div(\bar{\theta}, x) = \delta(\theta_{ein} + \arctan\left(\frac{x(\theta, \bar{\theta})}{d}\right) - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{Gl. 3.29})$$

$$p(\theta) = \int_{L_{Probe}} dx \cdot bel(x) \cdot \int_{\bar{\theta}_1(x)}^{\bar{\theta}_2(x)} d\theta_{aus} \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x(\theta, \bar{\theta})}{d}\right), \theta_{aus}\right)$$

(Gl. 3.30)

2.) Diffuse Lichtquelle direkt vor der Probe mit  $bel(x) = bel_0 = const$

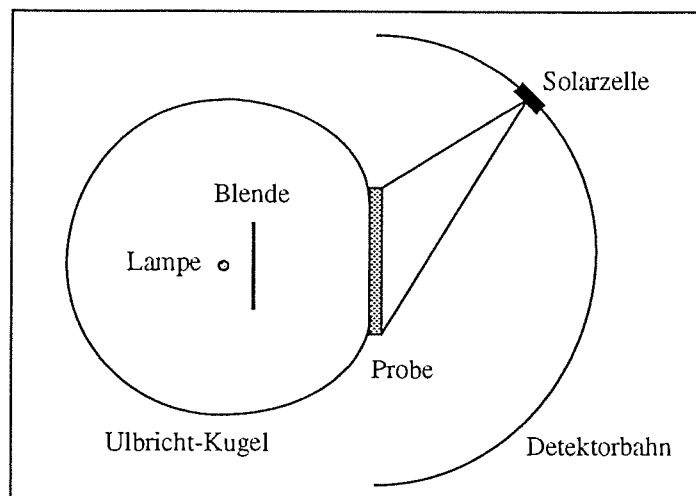


Abb. 3.7  
Meßaufbau mit diffuser, homogener Beleuchtung

$$div(\bar{\theta}, x) = div_0 = const \quad (\text{Gl. 3.31})$$

$$P(\theta) = bel_0 \cdot div_0 \cdot \int_{L_{Probe}} dx \cdot \int_{\bar{\theta}_1(x)}^{\bar{\theta}_2(x)} d\theta_{aus} \cdot \int_0^{\pi} d\theta_{ein} \cdot f(\theta_{ein}, \theta_{aus})$$

$$(\text{Gl. 3.32})$$

Inwieweit die diese Aufbauten beschreibenden Gleichungen die charakteristische Streufunktion noch eineindeutig auf die Meßwerte abbilden, muß an dieser Stelle offen bleiben. Jedoch stellt die mögliche Aussicht, aus einer diffus-direkt Messung bei genügend feiner Rasterung der Meßpositionen die volle Information des winkelabhängigen Streuverhaltens zurückzurechnen, eine reizvolle Idee dar. Um dies zu klären, ist aber eine eingehendere Analyse des Problems notwendig.

## 4.) Aspekte der beschreibenden Integralgleichung hinsichtlich möglicher Lösungsansätze

### 4.1 Beziehung zwischen Volterrascher und Fredholmscher Integralgleichung

Ausgangspunkt der Untersuchung ist die Integralgleichung 3.28 :

$$P(\theta) = \int_{\theta_1(\theta)}^{\theta_2(\theta)} d\bar{\theta} \cdot g(\theta, \bar{\theta}) \cdot f(\bar{\theta}) \quad (\text{Gl. 4.1})$$

Hierbei handelt es sich um eine eindimensionale Volterrasche Integralgleichung erster Art. Die Aufgabe bei derartigen Integralgleichungen besteht in der Bestimmung der unbekannt-ten Funktion  $f(\theta)$  aus den bekannten Funktionen  $p(\theta)$  und der Kernfunktion  $g(\theta, \bar{\theta})$  unter Berücksichtigung der Integrationsgrenzen  $\theta_{1,2}(\theta)$ . Integralgleichung erster Art be- deutet, daß die gesuchte Funktion  $f(\bar{\theta})$  nur im Integral erscheint. Im Gegensatz dazu tritt bei Integralgleichungen zweiter Art die gesuchte Funktion sowohl im Integral als auch au- ßerhalb desselben auf [Bronstein]. Die Volterrasche Integralgleichung mit variablen In- tegralgrenzen ist äquivalent zu einer Fredholmschen Gleichung mit festen Integralgrenzen und modifizierter Kernfunktion:

$$P(\theta) = \int_0^{\pi} d\bar{\theta} \cdot \tilde{g}(\theta, \bar{\theta}) \cdot f(\bar{\theta}) \quad (\text{Gl. 4.2})$$

mit 
$$\tilde{g}(\theta, \bar{\theta}) = \Omega(\theta_1(\theta), \theta_2(\theta), \bar{\theta}) \cdot g(\theta, \bar{\theta}) \quad (\text{Gl. 4.3})$$

Dabei hat  $\Omega(a, b, \bar{\theta})$  folgende Eigenschaft:

$$\Omega(a, b, \bar{\theta}) = \begin{cases} 1 & a \leq \bar{\theta} \leq b \\ 0 & \bar{\theta} < a \vee \bar{\theta} > b \end{cases} \quad (\text{Gl. 4.4})$$

### 4.2 Das zugeordnete diskrete Problem

Die obige Gleichung kann durch Anwendung von numerischen Integrationsmethoden dis- kretisiert werden. Dabei wird das Integral durch eine Summe ersetzt. Bekannte Näherungs- verfahren sind die Trapezregel, Keplersche Faßregel und die Simpsonsche Regel. Diese Verfahren ersetzen die zu integrierende Funktion durch Stücke von integrierbaren Fitfun- ktionen (Geradenstücke bei der Trapezregel, Parabelstücke bei der Kepler- und Simpsonre- gel), die an eine endliche Zahl von Stützstellen angepaßt werden [dtv - math].

Im Folgenden wird die Trapezregel verwendet.

$$\int_a^b dx \cdot f(x) \approx \frac{a-b}{n_f} \cdot \sum_{i=1}^{n_f} C_i \cdot f(x_i) \quad (\text{Gl. 4.5})$$

mit

$$C_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 1 \text{ und } i = n_f \\ 1 & \text{für } 1 < i \text{ und } i < n_f \end{cases} \quad (\text{Gl. 4.6})$$

Diskretisiert wird die Ausgangsgleichung sowohl durch die Integralnäherung als auch durch die endliche Zahl von diskreten Meßwerten. Damit sind folgende Rasterparameter notwendig:

$n_f$ : die Anzahl Stützstellen von  $f(\bar{\theta})$

$n_p$ : die Anzahl der Detektorpositionen und damit verknüpften Meßwerten

$s \in [1, n_f]$ : Laufindex für die Stützstellen von  $f(\bar{\theta})$

$t \in [1, n_p]$ : Laufindex für die Detektorpositionen

Die Winkelraasterung wird äquidistant gewählt: <sup>1</sup>

$$\bar{\theta}_s = \frac{\pi}{(n_f - 1)} \cdot (s - 1) \quad \theta_t = \frac{\pi}{(n_t - 1)} \cdot (t - 1) \quad (\text{Gl. 4.7})$$

mit zugehörigen Funktionswerten

$$f_s = f(\bar{\theta}_s) \quad P_t = P(\theta_t) \quad \tilde{g}_{t,s} = \tilde{g}(\theta_t, \bar{\theta}_s) \quad (\text{Gl. 4.8})$$

Die diskrete Integralgleichung hat dann folgende Gestalt:

$$P_t = \sum_{s=1}^{n_f} \tilde{g}_{t,s} \cdot C_s \cdot f_s = \sum_{s=1}^{n_f} \tilde{G}_{s,t} \cdot f_s \quad (\text{Gl. 4.9})$$

mit

$$\tilde{G}_{s,t} = \tilde{g}_{t,s} \cdot C_s \quad (\text{Gl. 4.10})$$

Vektorielle Schreibweise: <sup>2</sup>

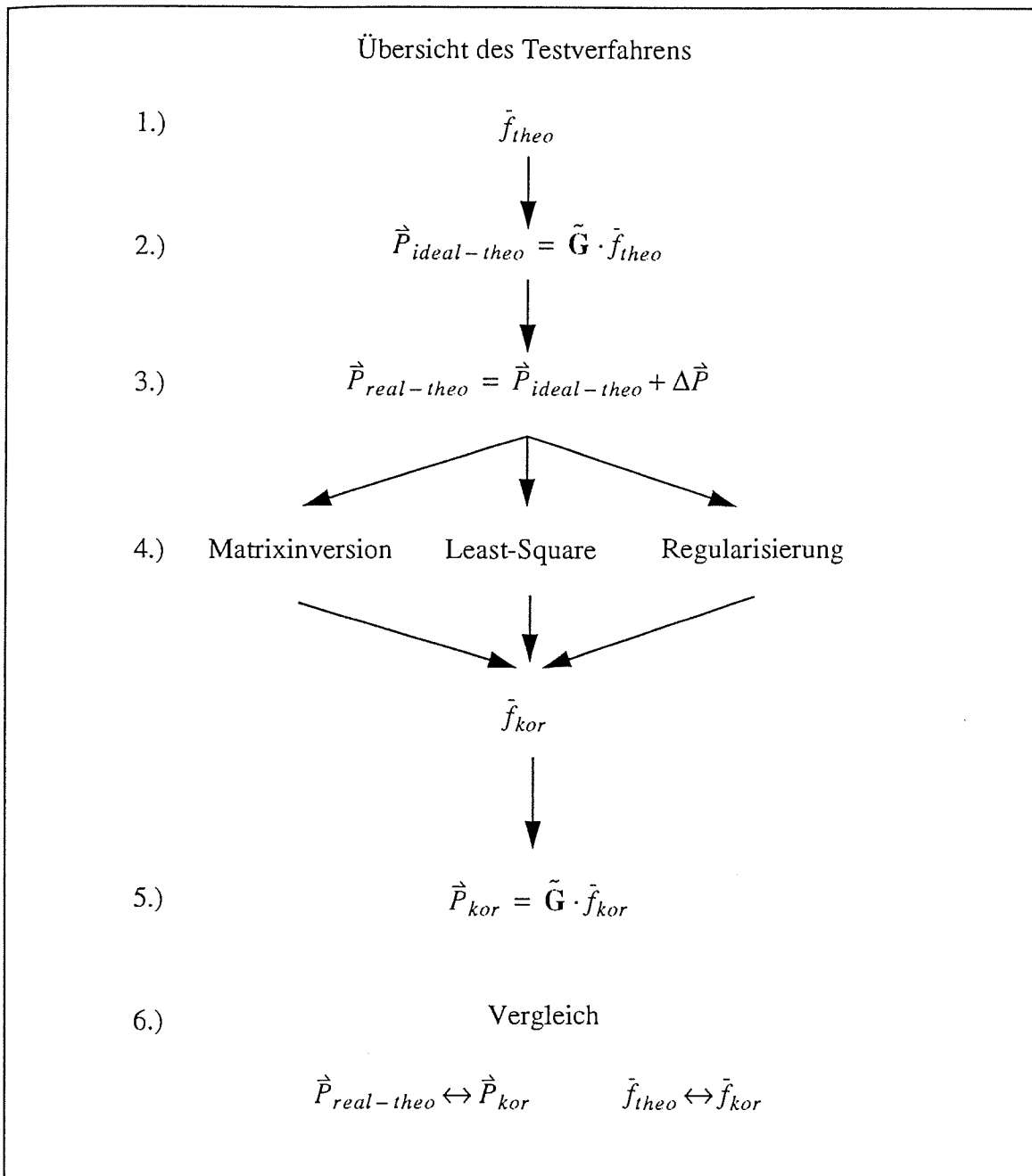
$$\vec{P} = \vec{G} \cdot \vec{f} \quad (\text{Gl. 4.11})$$

1. Neben der äquidistanten Winkelunterteilung sind auch noch andere Raster denkbar. Eine Rasterung des Detektorwinkels  $\theta$ , die den vom Detektor aus gesehenen Raumwinkel der Probe berücksichtigt, ist sicherlich sinnvoll.

2. Symbole für Matrizen werden in den Gleichungen immer fett gedruckt



#### 4.1.3 Das Testverfahren der Lösungsansätze



Als Modellbeispiel dient die in Kapitel 3 entwickelte Integralgleichung 3.28 mit zugehöriger Kernfunktion. Für den Test der Lösungsansätze wird nachfolgendes Schema verwendet.:

1.) Man gibt sich ein bestimmtes charakteristisches Streuverhalten, beschrieben durch  $\vec{f}_{theo}$ , vor. Ausgezeichnete Streucharakteristiken ergeben sich für isotrop bzw. nicht streuendes Material. Sie werden mathematisch folgendermaßen beschrieben:

Isotrop-Streuer - isotrop streuendes Material (siehe Abb. 4.2)

$$\bar{f} = \frac{1}{n_f} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f(\bar{\theta}) = \frac{1}{\pi} \quad (\text{Gl. 4.12})$$

Delta-Streuer - nicht streuendes Material (siehe Abb. 4.1)

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f(\theta) = \delta(\theta - \theta_0) \quad (\text{Gl. 4.13})$$

Spezielle Wahl für die Testdaten:  $\theta_0 = \pi/2$

2.) Daraus berechnen sich über Gl.4.7 theoretische, "ideale Meßwerte"  $\vec{P}_{ideal-theo}$  (siehe Abb. 4.3 und 4.4)

3.) Man addiert zu den theoretischen "Meßwerten" einen statistischen Meßfehler  $\Delta\vec{P}$  und erhält  $\vec{P}_{real-theo}$ . Als Fehlermodell wird ein normalverteilter, absoluter Fehler angenommen.. Die Standardabweichung des Fehlermodells kann dabei variiert werden. Die verwendung eines relativen Fehlers ist unangemessen, da die theoretisch generierten Werte  $\vec{P}_{ideal-theo}$ , die null sind, sonst fehlerfrei wären. Aus der Dichte-Formel der Gaußverteilung erhält man für die Fehler :

$$\Delta\vec{P}(z_i) = \sigma \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(z_i)} \quad (\text{Gl. 4.14})$$

$z_i$  : gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall (0, 1)

$\sigma$  : Standardabweichung

(siehe Abb. 4.5 und 4.6; mit  $\sigma = 0.0005$ )

4.) Auf die theoretischen "realen Meßwerte"  $\vec{P}_{real-theo}$  wendet man das jeweilige Invertierungsverfahren an und erhält  $\vec{f}_{kor}$ .

5.) Die korrigierten Werte  $\vec{f}_{kor}$  kann man nun wieder über  $\vec{G}$  auf Messwerte  $\vec{P}_{kor}$  umrechnen. Diese sind natürlich nicht notwendigerweise identisch mit  $\vec{P}_{real-theo}$ , da die Invertierungsverfahren (d.h. der zugehörigen Abbildung) nicht unbedingt Bijektionen darstellen.

6.) Bei einem sinnvollen Invertierungsverfahren sollte sowohl eine gute Übereinstimmung zwischen  $\vec{P}_{real-theo}$  und  $\vec{P}_{kor}$  als auch  $\vec{f}_{theo}$  und  $\vec{f}_{kor}$  bestehen. Außerdem muß diese Übereinstimmung eine "gewisse Stabilität" gegenüber der Variation des Fehlers  $\Delta\vec{P}$  aufweisen.

## Delta-Streuer

$\tilde{f}_{theo}$

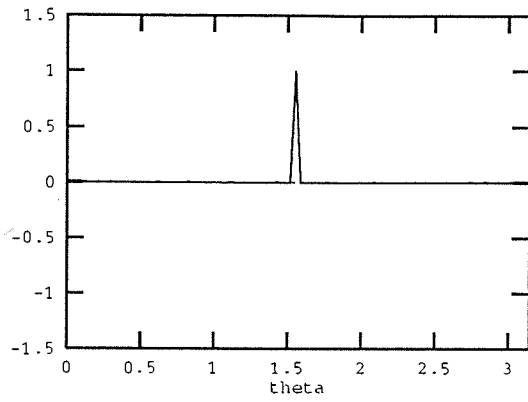


Abbildung 4.1

## Isotrop-Streuer

$\tilde{f}_{theo}$

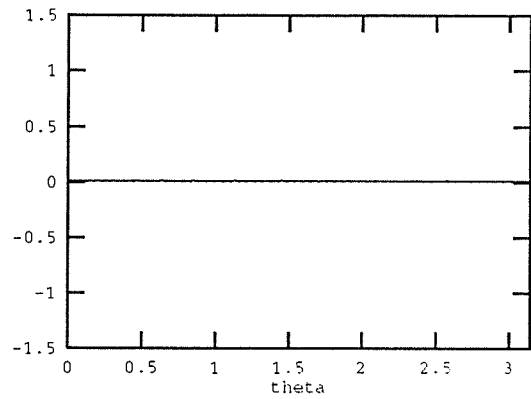


Abbildung 4.2

$\vec{P}_{ideal-theo}$

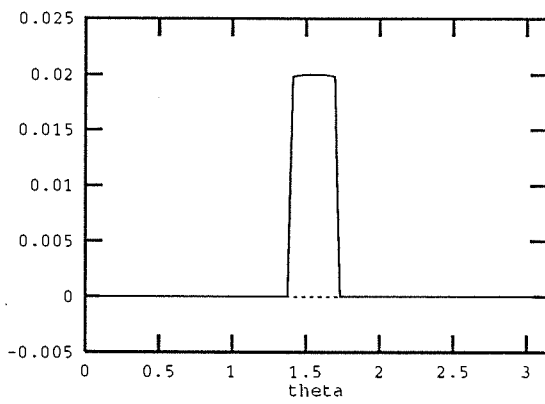


Abbildung 4.3

$\vec{P}_{ideal-theo}$

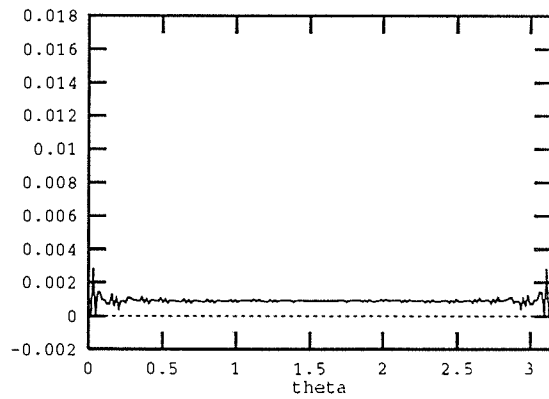


Abbildung 4.4

$\vec{P}_{real-theo}$

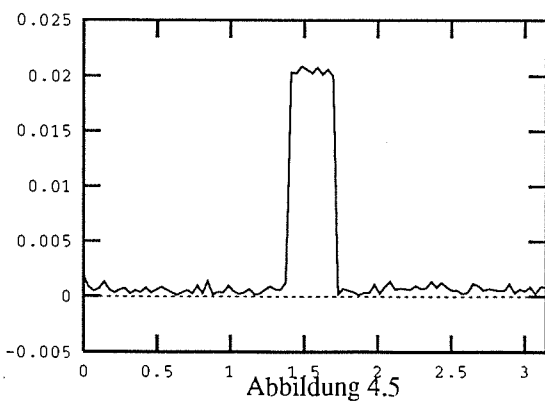


Abbildung 4.5

$\vec{P}_{real-theo}$

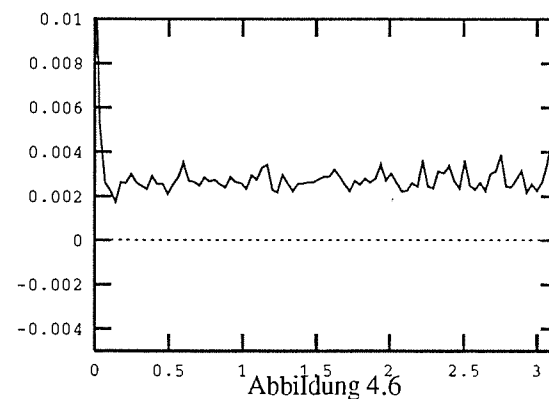
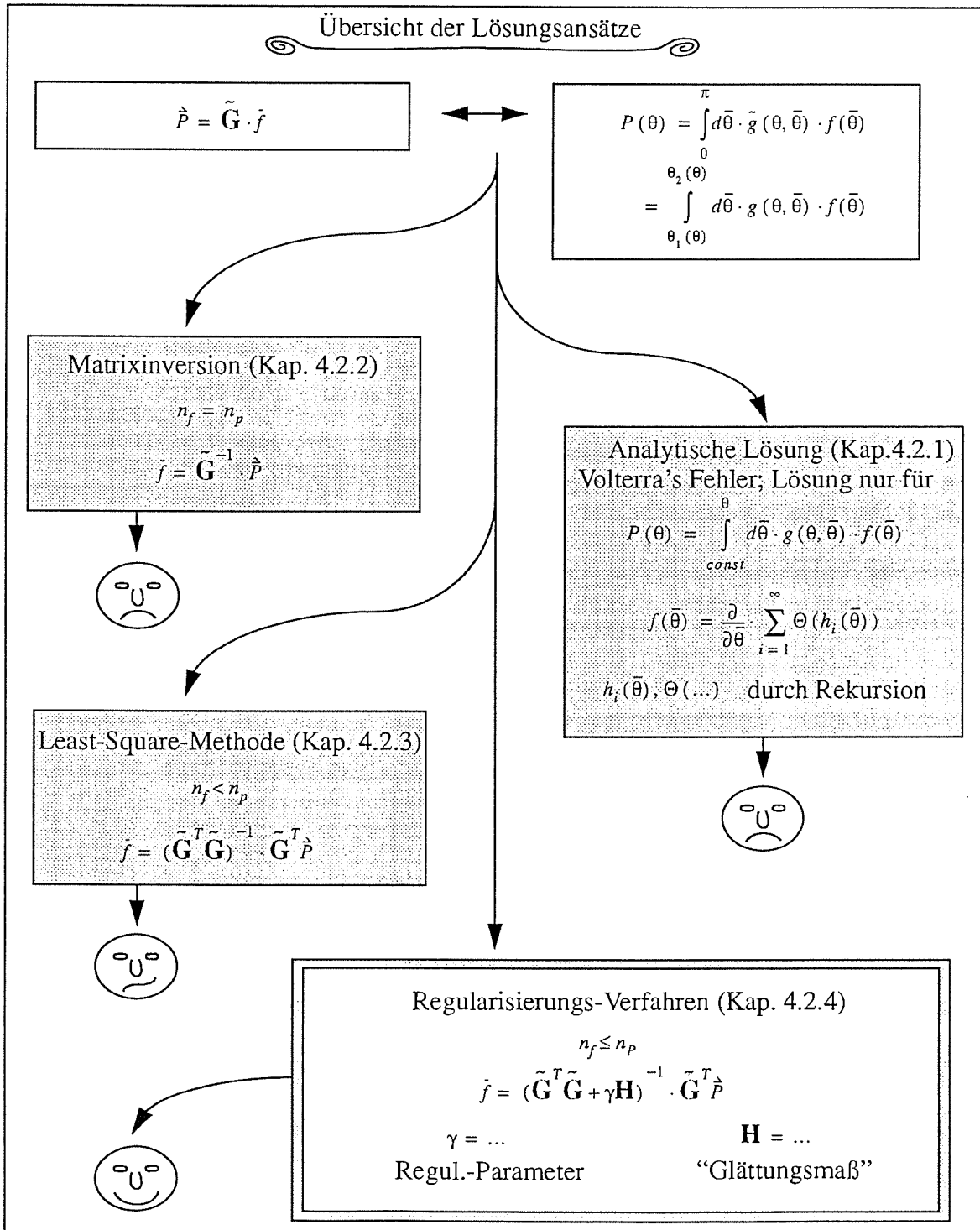


Abbildung 4.6

## 5.) Die verschiedenen Ansätze zur Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung

Die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen gemessenen Streudaten und der tatsächlichen Streufunktion führte, wie in Kapitel 3 gesehen, zu einer Integralgleichung. Ein wesentlicher Teil der Arbeit bestand in der Suche nach einem geeigneten Auswerteverfahren dieser Gleichung. Im folgenden sollen die erfolglosen Lösungsansätze, die aber wesentlich zum Verständnis des Problems beitragen, dargestellt werden. Daraus folgte schließlich die Erkenntnis, daß es sich hier um ein "schlecht gestelltes Problem" handelt, dessen angemessene Behandlung Regularisierungsmethoden erfordert.



## 5.1 Versuch einer analytischen Lösung - Volterras Fehler

Der erste Ansatz bestand in einem Versuch, diese Gleichung analytisch zu lösen. Eigene Versuche, die Gleichung durch Differentiation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückzuführen, scheiterten unter anderem an der Nichtseparierbarkeit der Kernfunktion, d. h.  $g(\theta, \bar{\theta})$  kann nicht als Produkt  $g_1(\theta) \cdot g_2(\bar{\theta})$  geschrieben werden.

In der Literatur findet man neben Arbeiten von E. Schmidt, Hilbert und Kellog vor allem bei Volterra Integralgleichungen erster Art behandelt (siehe [Hilbert], [Kelo - 02] und [Volterra]). Volterra gibt für folgende der obigen äquivalenten Gleichung<sup>1</sup>

$$\varphi(x) = \int_{f(x)}^x d\xi \cdot K(x, \xi) \cdot u(\xi) \quad (\text{Gl. 5.1})$$

eine Lösung an:

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_0^x d\xi \cdot u(\xi) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Theta(f_i(x)) \quad (\text{Gl. 5.2})$$

und

$$\Theta(x) = \int_{f(x)}^x d\xi \cdot u(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(x) \quad (\text{Gl. 5.3})$$

Die  $f_i(x)$  erhält man aus

$$x = f_0(x) ; f(x) = f_1(x) ; f(f(x)) = f_2(x) \dots \quad (\text{Gl. 5.4})$$

Die  $\Theta_n(x)$  aus der Rekursionsformel

$$\Theta_n(x) = \frac{\varphi(x)}{K(x, x)} + \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{1}{K(x, x)} \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \Theta_{n-1}(\xi) \quad (\text{Gl. 5.5})$$

mit

$$\Theta_0(x) = \frac{\varphi(x)}{K(x, x)} \quad (\text{Gl. 5.6})$$

Die Beweisidee besteht im Zurückführen der Integralgleichung erster Art für  $u(\xi)$  auf eine Integralgleichung zweiter Art für  $\Theta(\xi)$  (Gl. 5.7), die sich iterativ lösen läßt (Über Picardsches Iterationsverfahren). Über Gl. 5.2 erhält man dann aus der Lösung für  $\Theta(\xi)$  durch Differentiation die Lösung für  $u(\xi)$ .

1. In Kapitel 5.1 werden die von Volterra verwendeten Variablenbezeichnungen benutzt. Für die weiteren mathematischen Bedingungen an die auftretenden Funktionen siehe [Volterra].

Ausgangspunkt für Volterras Beweis ist daher die Äquivalenz von Gl. 5.1 und 5.3 zu:

$$\varphi(x) = K(x, x) \cdot \Theta(x) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \Theta(\xi) \right) \quad (\text{Gl. 5.7})$$

Formt man jedoch Gl. 4.3 durch partielle Integration um, ergibt sich unter Verwendung der Bezeichnung für das Integral

$$\bar{u}(x) = \int d\bar{x} \cdot u(\bar{x}) \quad (\text{Gl. 5.8})$$

folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= K(x, x) \cdot \bar{u}(x) - (K(x, f(x)) \cdot \bar{u}(f(x))) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \bar{u}(\xi) \right) \\ &= K(x, x) \cdot \Theta(x) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \Theta(\xi) \right) \\ &\quad + \bar{u}(f(x)) \cdot (K(x, x) - K(x, f(x))) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \bar{u}(f(\xi)) \right) \\ &= \varphi(x) + \bar{u}(f(x)) \cdot (K(x, x) - K(x, f(x))) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \bar{u}(f(\xi)) \right) \\ &= \varphi(x) + \bar{u}(f(x)) \cdot \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot \bar{u}(f(\xi)) \right) \\ &= \varphi(x) + \int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot (\bar{u}(f(x)) - \bar{u}(f(\xi))) \quad (\text{Gl. 5.9}) \end{aligned}$$

Das heißt, um die oben geforderte Äquivalenz zu erreichen, muß für alle  $x$  gelten:

$$\int_{f(x)}^x d\xi \cdot \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \cdot (\bar{u}(f(x)) - \bar{u}(f(\xi))) = 0 \quad (\text{Gl. 5.10})$$

Dies ist aber sicherlich nicht für beliebige Kernfunktionen  $K(x, \xi)$  und beliebige Funktionen  $f(x)$ , die die Integrationsgrenze festlegen, erfüllt. Sicherlich aber immer für  $f(x) = \text{const.}$

Gegenbeispiel:

$$K(x, \xi) = x \cdot \xi \text{ und } \varphi(x) = \frac{x}{3} \cdot (x^3 - (f(x))^3) \quad (\text{Gl. 5.11})$$

D.h. die bekannte Lösung ist:

$$u(x) = x \text{ und damit } \Theta(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - (f(x))^2) \quad (\text{Gl. 5.12})$$

Gemäß Gl. 5.7 müßte sich damit ergeben:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (x^2 - (f(x))^2) \right) - \left( \int_{f(x)}^x d\xi \cdot x \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (\xi^2 - (f(\xi))^2) \right) \right) \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{x^2 \cdot (f(x))^2}{2} + \frac{x \cdot (f(x))^3}{2 \cdot 3} + \left( x \cdot \int_{f(x)}^x d\xi \cdot (f(\xi))^2 \right) \quad (\text{Gl. 5.13}) \end{aligned}$$

Wählt man zum Beispiel  $f(x) = x^2$  wählt, erhält man

$$\varphi(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^2 \cdot (f(x))^2}{2} + \frac{x \cdot (f(x))^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 5} - \frac{x \cdot (f(x))^5}{2 \cdot 5} \quad (\text{Gl. 5.14})$$

Dies kann nicht äquivalent zu Gl. 5.11 sein, da in Gl. 5.14 Potenzen von  $x$  größer als 7 auftreten.

Wählt man jedoch  $f(x) = c$  erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x^4}{3} - \frac{x^2 \cdot (f(x))^2}{2} + \frac{x \cdot (f(x))^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^2 \cdot (f(x))^2}{2} - \frac{x \cdot (f(x))^3}{2} \\ &= \frac{x}{3} \cdot (x^3 - (f(x))^3) \quad (\text{Gl. 5.15}) \end{aligned}$$

was Gl. 5.11 entspricht. Volterras Lösung ist also nur richtig für  $f(x) = \text{const}$  und läßt sich damit nicht auf das Ausgangsproblem anwenden. Es ist allerdings zu bemerken, daß durchaus Meßaufbauten vorstellbar sind, die eine Integralgrenze, d.h. den Winkel unter dem einer der beiden Probenränder den Detektor sieht, konstant lassen. (zum Beispiel bei einer Bewegung der Meßzelle geradlinig auf einen Probenrand zu)

Die weitere Ausarbeitung wird jedoch zeigen, daß selbst eine bekannte, analytische Lösung nur für das rein mathematische Problem relevant ist und für die physikalischen, fehlerbehafteten Meßwerte kein geeignetes Auswerteverfahren darstellt.

## 5.2 Die Lösungsansätze des zugeordneten diskreten Problems

### 5.2.1 Matrixinversion

Der erste Lösungsansatz für das zugeordnete diskrete Problem bestand darin, die Vektorgleichung durch Invertierung von  $\tilde{\mathbf{G}}$  zu lösen. Die Gleichung kann nur dann im mathematischen Sinn eindeutig gelöst werden, wenn  $\tilde{\mathbf{G}}$  Höchststrang hat, d.h. wenn die Zeilen- oder Spaltenvektoren der Matrix linearunabhängig sind. Dies ist im Modellproblem erfüllt.  $\tilde{\mathbf{G}}$  hat quasi Diagonal-Struktur. (siehe Kap. 3 Abb. 3.7) Dabei muß natürlich  $n_f = n_p$  gelten.

Als Lösung von Gl. 4.11 erhält man:<sup>1</sup>

$$\vec{f} = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \cdot \vec{P} \quad (\text{Gl. 5.16})$$

Dazu wurde ein Programm zur Matrixinvertierung nach dem Gaußalgorithmus erstellt. Auf einer Unix-Workstation der Reihe HP-700 ergaben sich für Matrixinvertierung der schwachbesetzten Matrix des Modellproblems folgende Rechenzeiten :

Matrixgröße	Rechenzeit
10x10	0,4 sec
50x50	2,2 sec
100x100	2,8 sec
500x500	310 sec
1200x1200	2h 45 min

Die für das Modellproblem nötige Winkelraasterung von typischerweise einem Grad führt zu 180x180 Matrizen. Die Rechenzeit stellt damit kein Problem dar. Leider ist dieses Lösungsverfahren trotzdem völlig ungeeignet.

Ein nur geringfügiges Verwackeln der generierten Meßdaten bewirkt eine drastische Änderung der zurückgerechneten Streufunktion. Die vorgegebene Streufunktion  $\vec{f}_{theo}$  ist schon bei ganz kleinem statistischen Fehler in den korrigierten Daten nicht wiederzuerkennen. (siehe Abb. 5.2, 5.4 und 5.6 für die Korrektur des Delta-Streuers und Abb. 5.8, 5.10 und 5.12 für die Korrektur des Isotrop-Streuers) Es treten sogar negative Werte auf, die für das zugrundeliegende physikalische Problem von vornherein auszuschließen sind.

Dieses Invertierungsverfahren zeigt ein "quasi chaotisches" Verhalten: "Kleinste Ursachen" führen zu "großen Wirkungen". Interessanterweise findet man bei den so korrigierten Werte  $\vec{f}_{kor}$  immer eine ähnliche Struktur. (vergleiche Abb. 5.6 mit Abb. 5.12)

Eine Erklärung dieser Instabilitäten erfolgt analog zu der im nächsten Abschnitt gegebenen für die Pseudo-Inverse. (Für quadratische Matrizen ist die inverse Matrix gleich der Pseudo-Inversen; siehe Gl. 5.39)

Man beachte, daß bei diesem Verfahren  $\vec{P}_{real-theo}$  mit dem zurückgerechneten  $\vec{P}_{kor}$  bis auf rechnerbedingte Rundungsfehler exakt übereinstimmt.

Die erste Idee zur Stabilisierung dieses Verfahrens bestand in der "Invertierung" mit der Nebenbedingung, daß die Lösung nur positiv ist. Der Ansatz dabei war, die diskrete Aus-

---

1. Zur Vermeidung einer unübersichtlichen Indizierung wird  $\vec{f}_{kor}$  in den auftretenden Gleichungen nur mit  $\vec{f}$  bezeichnet



gangsgleichung

$$\vec{P} = \tilde{\mathbf{G}} \cdot \vec{f} \quad (\text{Gl. 5.17})$$

als Darstellung des Vektors  $\vec{P}$  in der von den Spaltenvektoren von  $\tilde{\mathbf{G}}$  gebildeten Basis aufzufassen. Damit also:

$$\vec{P} = \vec{b}_s \cdot f_s \quad \text{mit} \quad (\vec{b}_s)_t = \tilde{\mathbf{G}}_{t,s} \quad (\text{Gl. 5.18})$$

$\vec{P}$  soll nun in der  $\vec{b}_s$  - Basis so dargestellt werden, daß sich nur positive Koeffizienten  $f_s$  ergeben und ein Restvektor  $\Delta\vec{P}$  minimiert wird.

Also:

$$\vec{P} = \vec{b}_k \cdot f_k^{pos} + \Delta\vec{P} \quad (\text{Gl. 5.19})$$

Da der Restvektor wegen der Minimalbedingung senkrecht auf den  $\vec{b}_k$  steht, folgt:

$$\vec{b}_j \cdot \vec{P} = \vec{b}_j \cdot \vec{b}_k \cdot f_k^{pos} \quad (\text{Gl. 5.20})$$

und damit:

$$f_k^{pos} = (\vec{b}_j \cdot \vec{b}_k)^{-1} \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{P}) \quad (\text{Gl. 5.20})$$

$$f_l^{neg} = 0 \quad (\text{Gl. 5.21})$$

mit

$$j, k \in \{n \mid n \in \{1, \dots, n_f\} \wedge ((\tilde{\mathbf{G}}^{-1} \cdot \vec{P})_n > 0)\} \quad (\text{Gl. 5.22})$$

$$l \in \{n \mid n \in \{1, \dots, n_f\} \wedge ((\tilde{\mathbf{G}}^{-1} \cdot \vec{P})_n \leq 0)\} \quad (\text{Gl. 5.23})$$

Dadurch konnten die physikalisch sinnlosen, negativen Koeffizienten in den Lösungen vermieden werden. Trotzdem blieb das Verfahren instabil gegenüber geringen Verwacklungen.

Weitere Ideen gingen dahin, aus dieser immer wieder auftretenden Struktur die gesuchten Werte durch Überlagerung mehrerer korrigierter Datensätze zu extrahieren, was aber erfolglos blieb. Detaillierte Untersuchungen in dieser Richtung bedürfen der eingehenden Analyse der linearen Abbildung, die durch die inverse Matrix beschrieben wird.

Da bei realen Meßdaten immer ein Meßfehler vorliegt, stellt das Zurückrechnen durch Matrixinversion kein brauchbares Auswerteverfahren dar.

# Korrektur der Delta-Streuer-Daten durch inverse Matrix

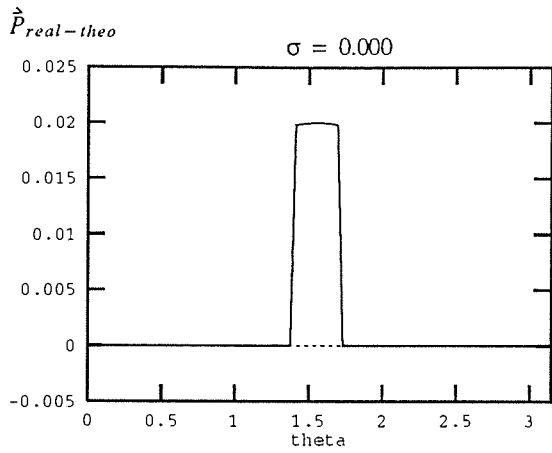


Abbildung 5.1

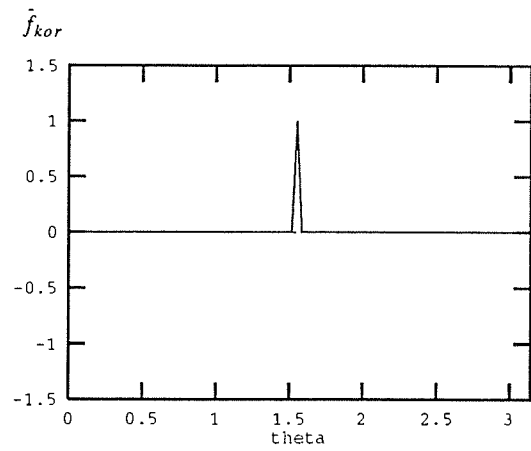


Abbildung 5.2

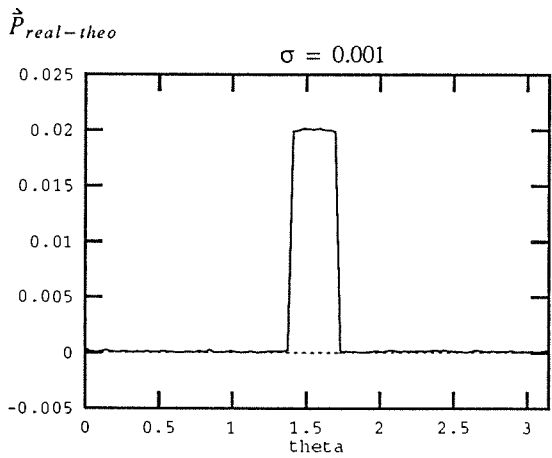


Abbildung 5.3

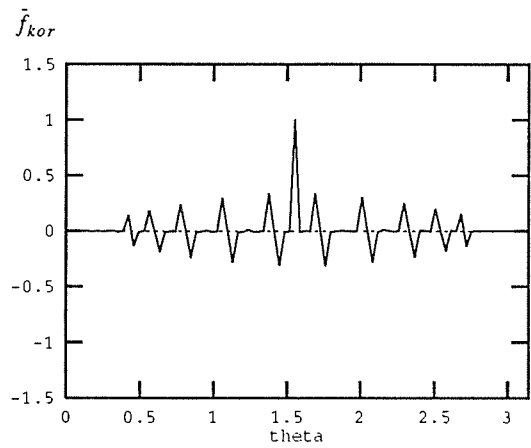


Abbildung 5.4

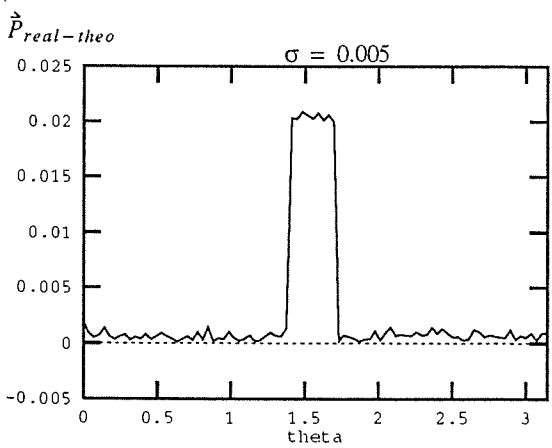


Abbildung 5.5

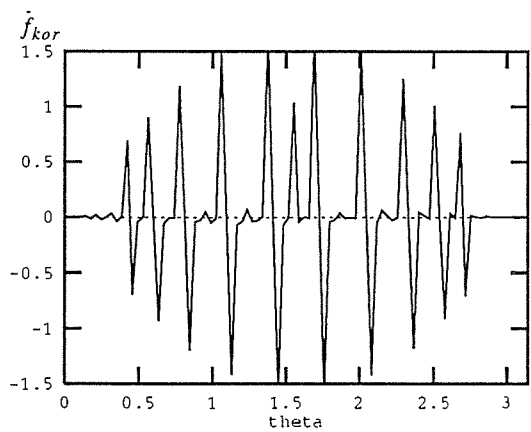


Abbildung 5.6

# Korrektur der Isotrop-Streuer-Daten durch inverse Matrix

$\dot{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.000$

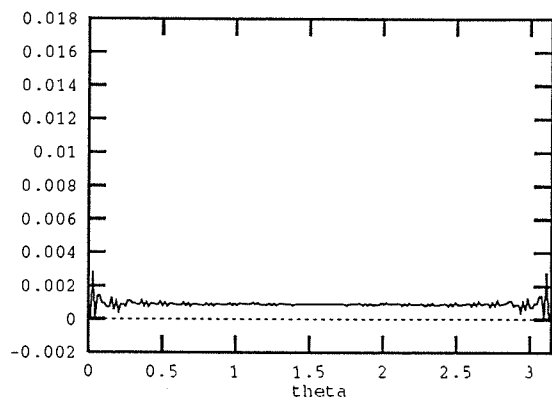


Abbildung 5.7

$\tilde{f}_{kor}$

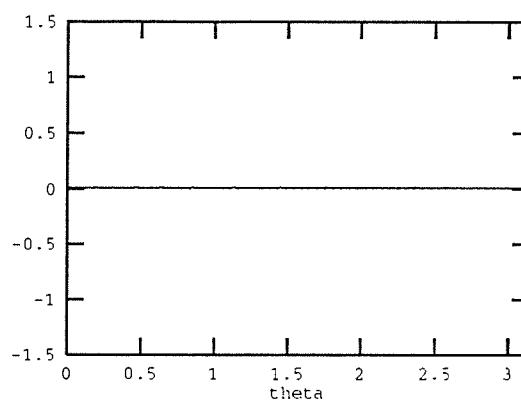


Abbildung 5.8

$\dot{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.001$

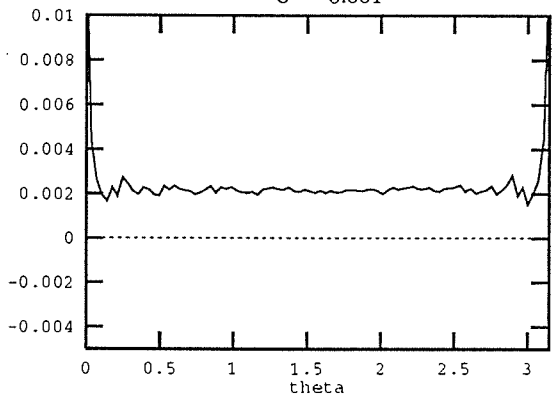


Abbildung 5.9

$\tilde{f}_{kor}$

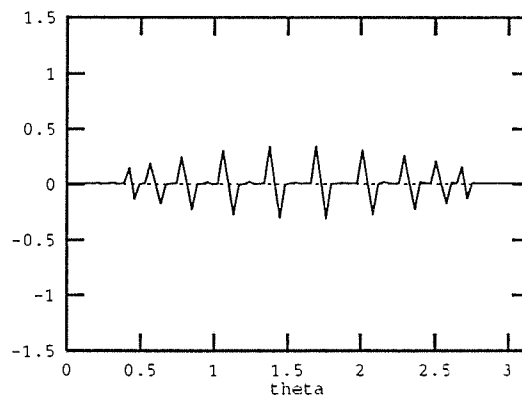


Abbildung 5.10

$\dot{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.005$

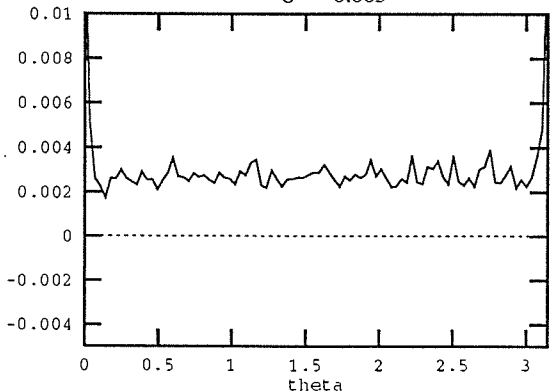


Abbildung 5.11

$\tilde{f}_{kor}$

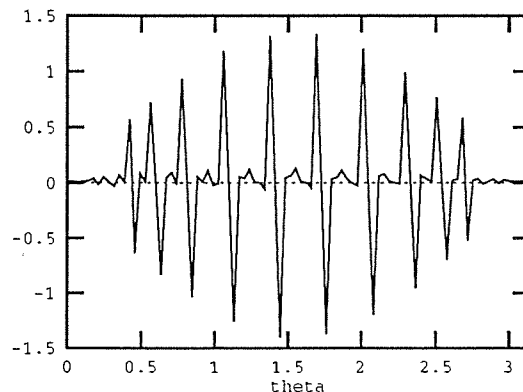


Abbildung 5.12

## 5.2.2 Pseudoinverse - Least Square Lösung

Der zweite Lösungsansatz besteht in der Idee, das Gleichungssystem für die gesuchten  $f_s$  überzubestimmen. Man wählt die Zahl der Messpositionen  $n_p$  größer als die Dimension  $n_f$  des Streuvektors  $\vec{f}$ . Eine deartige Gleichung kann dann im Least-Square-Sinne gelöst werden, d.h. :

Bestimme die  $f_s$  so, daß die Abweichung des mit diesen Koeffizienten bestimmten Korrektur-Vektors  $\vec{p}_{kor}$  von den tatsächlichen Werten  $\vec{P}$  minimal wird. Mathematisch bedeutet dies, das Problem auf die Minimierung eines Funktionals<sup>1</sup> zurückzuführen. (siehe z.B. [Hans - 74] oder [2mey - 77] )

$$V(\vec{f}) = \|\vec{P} - \tilde{G}\vec{f}\|^2 = \text{minimal} \quad (\text{Gl. 5.24})$$

mit der üblichen Vektornorm :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x_n \cdot x_n)} \quad (\text{Gl. 5.25})$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum:

$$\frac{\partial}{\partial f_k} V(\vec{f}) = 0 \quad (\text{Gl. 5.26})$$

Daraus folgt für die Komponenten:

$$\frac{\partial}{\partial f_k} V(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial f_k} ((P_t - \tilde{G}_{t,s} f_s) \cdot (P_t - \tilde{G}_{t,s} f_s)) = 0$$

$$\rightarrow (P_t - \tilde{G}_{t,s} f_s) \tilde{G}_{t,k} + \tilde{G}_{t,k} (P_t - \tilde{G}_{t,s} f_s) = 0 \quad (\text{Gl. 5.27})$$

$$\rightarrow \tilde{G}_{t,k} \tilde{G}_{t,s} f_s = \tilde{G}_{t,k} P_t$$

$$\rightarrow f_s = (\tilde{G}_{s,t} \tilde{G}_{t,k})^{-1} \tilde{G}_{k,t} P_t \quad (\text{Gl. 5.28})$$

oder in vektorieller Form:

$$\vec{f} = (\tilde{G}^T \tilde{G})^{-1} \cdot \tilde{G}^T \vec{P} \quad (\text{Gl. 5.29})$$

Den Ausdruck vor  $\vec{P}$  bezeichnet man als Pseudo-Inverse. (siehe [Stoer - 79] ) Er soll in Zukunft mit  $G^\dagger$  abgekürzt werden. Damit ergibt sich also:

1. Strenggenommen liegt ein Extremwertproblem für eine lineare Funktion  $V: R^n \rightarrow R$  vor; nur im nicht diskreten Fall wird dies zur Variationsaufgabe eines Funktionals.

$$\dot{f} = \tilde{\mathbf{G}}^\dagger \cdot \dot{P} \quad (\text{Gl. 5.30})$$

mit

$$\tilde{\mathbf{G}}^\dagger = (\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^T \quad (\text{Gl. 5.31})$$

Prinzipiell ließe sich diese Gleichung bei nicht singulären Matrizen durch Invertierung der Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}}$  lösen. Als nützlicher erweist sich die Lösung über eine singuläre Wertezerlegung (single value decomposition, SVD) der Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}$ :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{Gl. 5.32})$$

Diese Zerlegung ist für nicht singuläre Matrizen  $\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}}$  möglich. Bei  $\mathbf{W}$  handelt es sich um eine Diagonalmatrix mit den sogenannten singulären Werten  $w_k$  als Diagonalelementen. Die Matrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}^T$  sind orthogonal. Das heißt:

$$1.) \quad \mathbf{W}_{k,l} = \delta_{k,l} \cdot w_k \quad (\text{Gl. 5.33})$$

$$2.) \quad \mathbf{U}_{t,s} \cdot \mathbf{U}_{s,i}^T = \delta_{t,i} \quad (\text{Gl. 5.34})$$

$$3.) \quad \mathbf{V}_{s,k} \cdot \mathbf{V}_{k,l}^T = \delta_{s,l} \quad (\text{Gl. 5.35})$$

$$\text{mit} \quad k, l, s \in \{1, \dots, n_f\} \text{ und} \quad i, t \in \{1, \dots, n_p\} \quad (\text{Gl. 5.36})$$

Diese Zerlegung bildet das Analogon zur Hauptachsentransformation für quadratische Matrizen, wobei die singulären Werte den Eigenwerten der Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}$  entsprechen. Bei quadratischen Matrizen sind die singulären Werte gerade die Eigenwerte und  $\tilde{\mathbf{G}}^\dagger$  ist identisch mit  $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$ . Über Gl. 5.32 erhält man:

$$(\tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{G}})^{-1} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^{-2} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{Gl. 5.37})$$

$\dot{f}$  läßt sich damit folgendermaßen schreiben

$$\dot{f} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W}^{-2} \cdot \mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T)^T \cdot \dot{P}$$

$$\rightarrow \quad \dot{f} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \dot{P} \quad (\text{Gl. 5.38})$$

Oder in Komponenten:

$$f_s = \mathbf{V}_{sk} \cdot \frac{1}{w_k} \cdot \delta_{k,l} \cdot \mathbf{U}_{l,t}^T \cdot P_t = \mathbf{V}_{s,l} \cdot \frac{1}{w_l} \cdot \mathbf{U}_{l,t}^T \cdot P_t \quad (\text{Gl. 5.39})$$

An dieser Gleichung kann man sehr gut die Gründe für mögliche Instabilitäten bei der "Invertierungs-Prozedur" ablesen: ergibt die singuläre Wertezerlegung einige sehr kleine Werte für  $w_k$ , haben die zugehörigen Summanden in der Summe ein sehr großes Gewicht.

Damit können kleine Fehler von  $\vec{P}$  bei kleinen auftretenden singulären Werten zu großen Fehler für  $\vec{f}$  führen.

Unter Zuhilfenahme einer Routine aus den Numerical Recipes in C wurde ein Programm erstellt, um  $\vec{f}$  über Gl. 5.39 zu errechnen. Um die Effektivität dieses Verfahrens einzuschätzen, wendete man es zunächst auf ein stark vereinfachtes zweites Modell-Problem an:

Das **zwei Kugel-Problem** besteht in der Aufgabe, die Einzelgewichte zweier Kugelsorten - rot und blau - zu bestimmen. Dazu stehen Mischungen mit roten und blauen Kugeln zur Verfügung, deren Gesamtgewichte mittels einer Waage bestimmt werden. Vom rein mathematischen Standpunkt scheint die Sache klar: Sobald es zwei "linear unabhängige" <sup>1</sup> Kugelmischungen gibt, kann das Einzelgewicht der jeweiligen Kugelart aus Gewichtsmessungen zweier Mischungen berechnet werden. (Lösen eines linearen Gleichungssystems oder letztlich Matrixinversion). Problematisch wird die Sache jedoch durch den physikalischen Meßfehler bei der Wägung. Es liegt hier wie bei der Aufgabe, die charakteristische Streufunktion zu bestimmen, die gleiche Problemstruktur vor:

- 1.) Gesucht ist eine der Messung nicht direkt zugängliche Größe:  
Gewicht der jeweiligen Kugelsorte - charakt. Streufunktion
- 2.) Man hat eine fehlerbehaftete Meßgröße:  
Gewicht der Kugelmischungen - Detektorsignal
- 3.) Es gibt ein charakteristisches Gewicht, das die additive bzw. integrale Zusammensetzung des Meßwerts aus den der Messung unzugänglichen Größen beschreibt:  
Matrix, die die Kugelverteilung in den Packungen festlegt  
- Integalkern der den endlichen Proben-Raumwinkel wichtet...

Beim Kugel-Problem wurde nun untersucht, inwieweit eine Überbestimmung des Gleichungssystems den Bereich, in dem die zurückgerechneten Kugelgewichte liegen, einschränkt.

Das Gewicht der roten (!) wurde 2 gewählt, das der blauen Kugel 5. Mit dem Rechner wurden zufällige Kugelmischungen generiert, d.h. durch gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall (0,1) wurde das Mischverhältnis der roten zu den blauen Kugeln festgelegt. Das Gesamtgewicht errechnet sich über die angenommenen Werte für die tatsächlichen Kugelgewichte. Dieser Wert ist dann mit einem recht großen, normalverteilten relativen Fehler ( $\sigma = 0.3$ ) verwackelt worden.

Zur Datenkorrektur wurden jeweils 20 Datensätze mit

$$n_p \in \{2, 12, 22, 32, 62, 92\}$$

verwendet.

Die Abb. 5.13 bis 5.18 zeigen die korrigierten Werte für die Kugelgewichte. Jeder Punkt entspricht einem aus einem Datensatz zurückgerechnetem Wertetupel. Aufgetragen ist horizontal das Gewicht der roten und vertikal das Gewicht der blauen Kugel. Außerdem enthält jedes Diagramm den wahren Wertetupel (2,5).

1. Zwei "linear unabhängige" Kugelmischungen bedeutet natürlich, daß das Verhältnis von roten zu blauen Kugeln in der einen Mischung ungleich dem Verhältnis in der anderen Mischung ist.

Wie schon in Abschnitt 5.2.1 gesehen, führt die einfache Matrixinversion ( $n_p = 2$ ) zu fatalen Ergebnissen. (siehe Abb. 5.13) Das zurückgerechnete Gewicht für die blaue Kugel variiert im Bereich von 1 und 9, für die rote Kugel werden sogar negative Werte errechnet (um -15). In den weiteren Diagrammen zeigt sich jedoch ein bemerkenswerter Effekt: je größer die "Überbestimmung" des Gleichungssystems, d.h. je größer das Verhältnis von  $n_p$  zu  $n_f$ , um so kleiner wird die Streuung der zurückgerechneten Werte um die vorgegebenen. Für  $n_p = 92$  errechnet man die Kugelgewichte mit einem Fehler von ca. 0.5 zurück. (Abb. 5.18) Die Zahl der nötigen "Meßwerte" ist damit aber ca. 50 mal größer als die Dimension der gesuchten Größe.

Obwohl die "notwendige Überbestimmung" des Gleichungssystems für ein stabiles Invertierungsverfahren sicherlich immer von der konkreten Gewichtsmatrix - sprich Kernfunktion - und vom angenommenen Fehler der "Meßwerte" abhängt, zeigt dieses einfache Beispiel die Problematik der Methode: Bei höher dimensionalen, zurückzurechnenden Größen, d.h. bei einem großen  $n_f$ , wird die Zahl der Meßwerte auch sehr groß, was lange Meßzeiten und sehr große Gewichtsmatrizen nach sich zieht, die sehr viel Speicherplatz und Rechenzeit zur singulären Wertzerlegung erfordern. Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode liegt aber in einer möglichen Fehlerabschätzung für die zurückgerechneten  $f_s$  bei bekanntem Fehler für die Meßwerte  $P_i$ .

Für eine "doppelte Überbestimmung" ( $n_p = 200$  und  $n_f = 100$ ) wurden die generierten theoretischen Meßdaten des Ausgangsproblems mit der obigen Methode über singuläre Wertzerlegung zurückgerechnet. Diese Korrektur zeigt gegenüber der reinen Matrixinversion eine deutliche Verbesserung. Bei einem  $\sigma = 0.001$  wird die Charakteristik des Delta-Streuers sehr gut zurückgerechnet. (Abb. 5.20) Auch der Isotrop-Streuer ist in korrigierten Werten noch zu erkennen. (Abb. 5.26) Für beide Fälle versagt die Matrixinversionsmethode schon bei einer noch kleineren Verwacklung der Meßwerte ( $\sigma = 0.0005$ ). Bei größeren Verwacklungen liefert jedoch auch die Methode der Pseudo-Inversen ohne eine Vergrößerung von  $n_p$  keine brauchbaren Resultate.

In der Literatur findet man den Vorschlag, den Invertierungsalgorithmus dadurch zu stabilisieren, daß man die kleinsten auftretenden  $w_k$  unendlich setzt, so daß die entsprechenden Terme in der Summe eliminiert werden (siehe Gl. 5.39). In den meisten Fällen führt diese Methode aber sicherlich zu systematischen Fehlern in der Lösung, die sich nur schwerlich oder garnicht abschätzen lassen ([num - recip]).

# Datenkorrektur beim "Kugel-Problem"

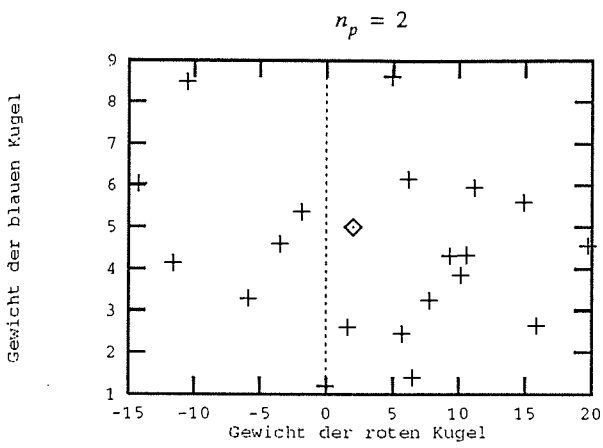


Abb. 5.13

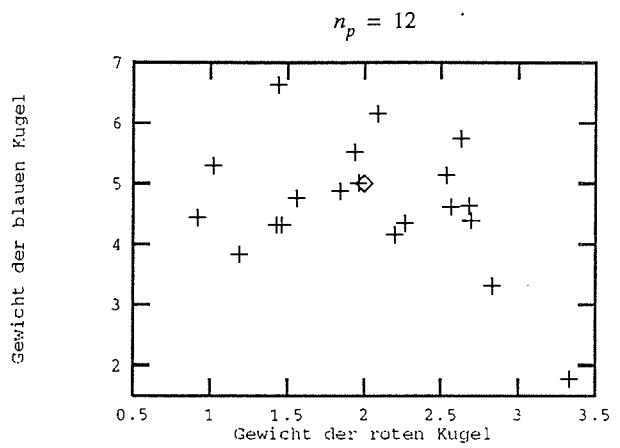


Abb. 5.14

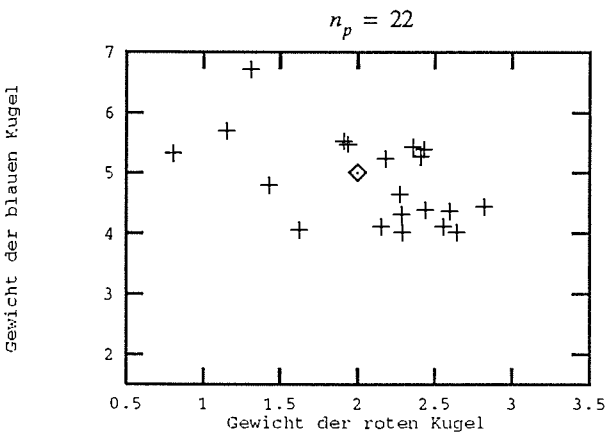


Abb. 5.15

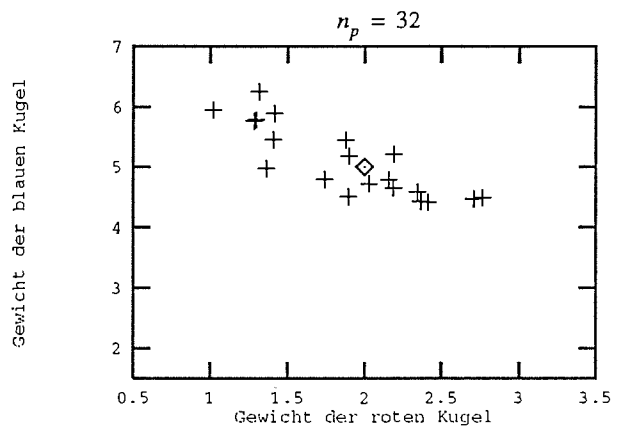


Abb. 5.16

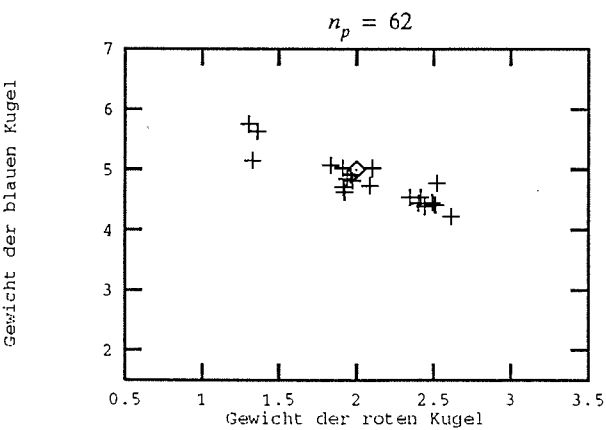


Abb. 5.17

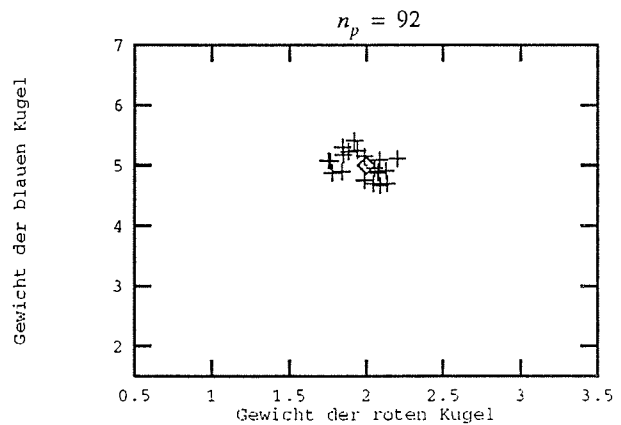


Abb. 5.18



# Korrektur der Delta-Streuer -Daten durch Pseudo-Inverse

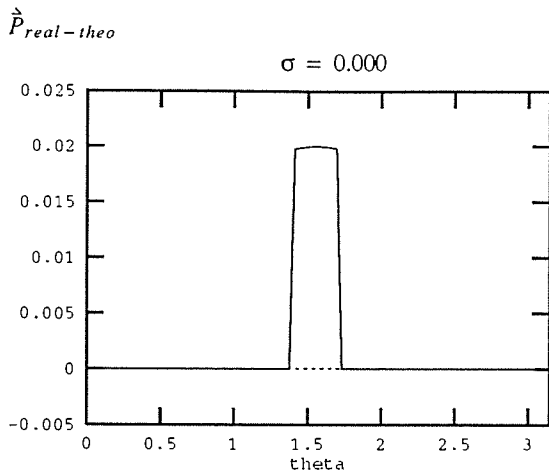


Abbildung 5.19

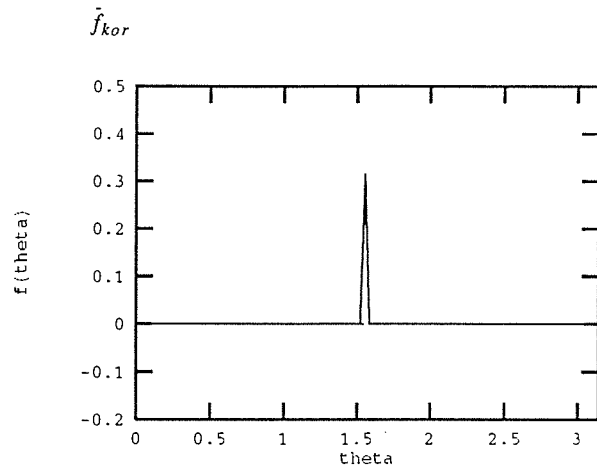


Abbildung 5.20

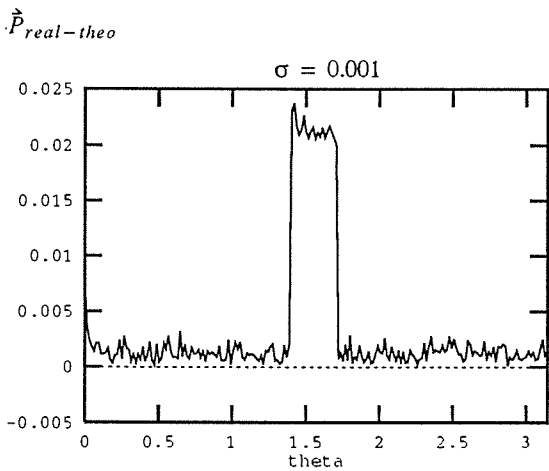


Abbildung 5.21

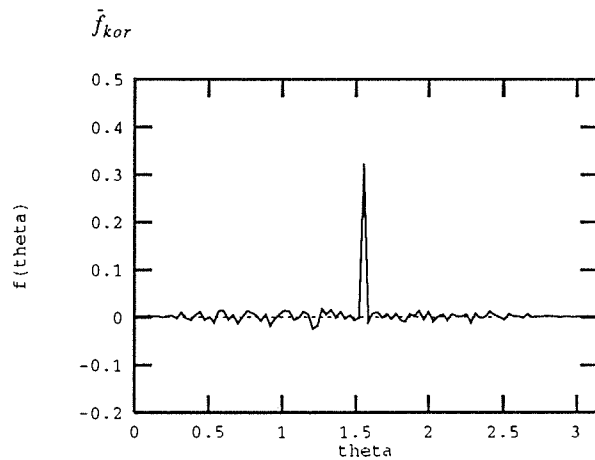


Abbildung 5.22

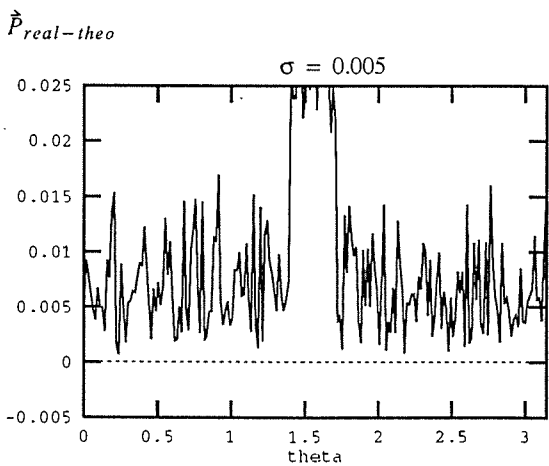


Abbildung 5.23

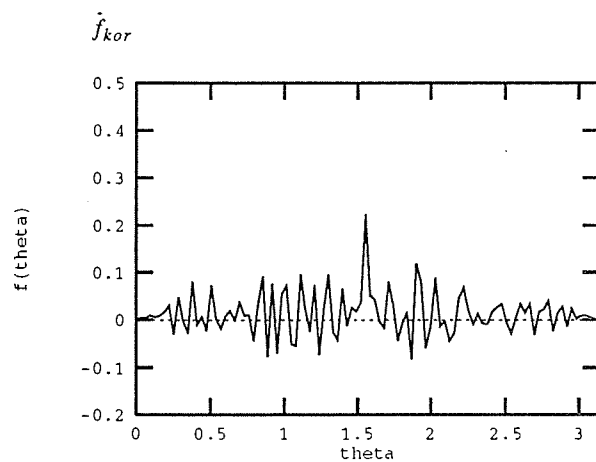


Abbildung 5.24

# Korrektur der Isotrop-Streuer-Daten durch Pseudo-Inverse

$\hat{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.000$

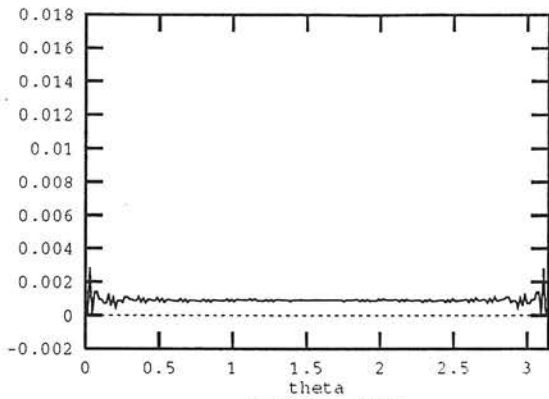


Abbildung 5.25

$\hat{f}_{kor}$

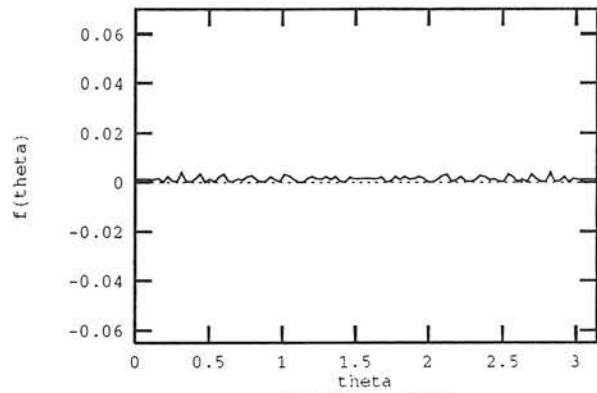


Abbildung 5.26

$\hat{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.001$

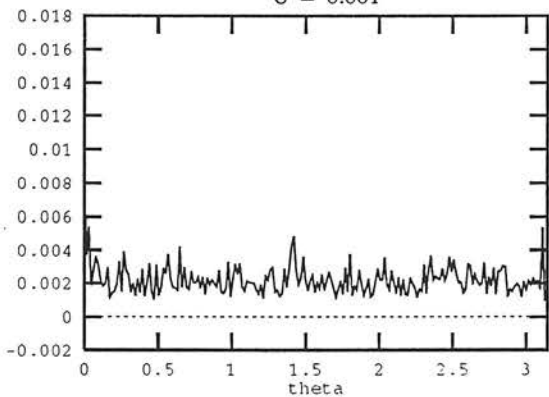


Abbildung 5.27

$\hat{f}_{kor}$

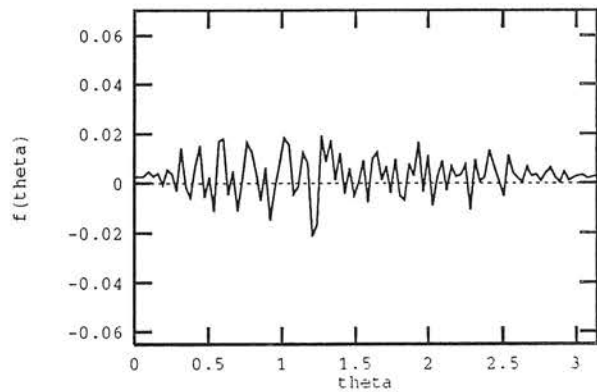


Abbildung 5.28

$\hat{P}_{real-theo}$

$\sigma = 0.005$

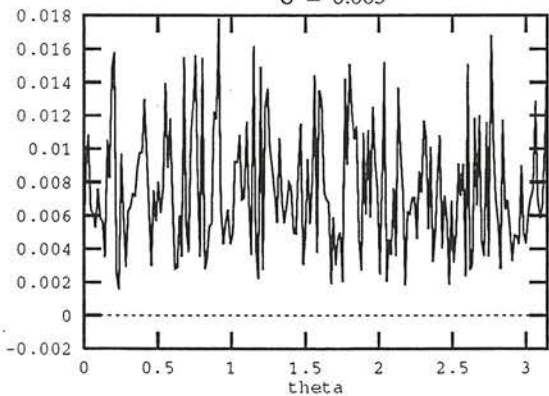


Abbildung 5.29

$\hat{f}_{kor}$

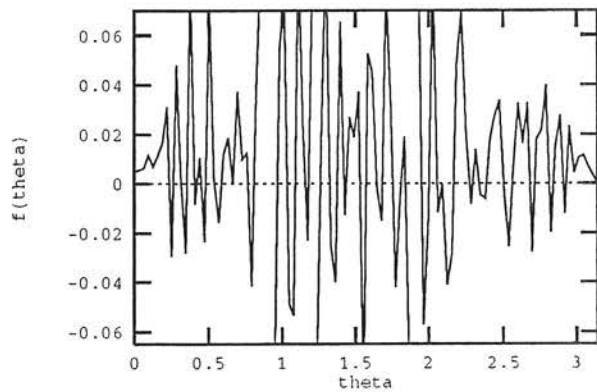


Abbildung 5.30

### 5.2.3 Regularisierungs Verfahren

Ausgangspunkt für das hier beschriebene Verfahren sind zwei oben gemachte Beobachtungen:

1.) Ab einer gewissen Verwacklung der theoretischen Meßwerte liefern die bisherigen Invertierungsverfahren sehr "verrauschte" Ergebnisse, die teilweise erheblich von den charakteristischen Ausgangswerten abweichen.

2.) Die singuläre Wertezerlegung zeigt die Ursache für drastische Änderungen durch das Korrekturverfahren bei nur kleinen Verwacklungen:

$$f_s = V_{s,l} \cdot \frac{1}{w_l} \cdot U_{l,l}^T \cdot P_l \quad (\text{Gl. 5.40})$$

Kleine auftretende  $w_l$  führen zu einer sehr großen Wichtung des entsprechenden Summanden und damit auch zu großen Fehlern bei nur kleinen Verwacklungen.

Die Idee der Regularisierung besteht nun darin, der Lösung eine bestimmte zusätzliche "Zwangsbedingung" aufzuerlegen, was sich in einer "Stabilisierung" der die Invertierung beschreibenden Abbildung ausdrücken sollte. Das Maß für den Einfluß dieser zusätzlichen Bedingung stellt der sogenannte Regularisierungsparameter  $\gamma$  dar. Eine mögliche Zusatzbedingung ist die Minimierung des Betrags der Lösung, was in gewisser Weise die "Glattheit" der Funktion bzw. des entsprechenden Vektors beschreibt.<sup>1</sup> Kennzeichen für die instabilen Lösungen bei der Methode der Inversen bzw. Pseudoinversen waren die typischen Oszillationen mit auftretenden negativen Werten, die damit zu großen Funktions- bzw. Vektorbeträgen führten. Durch die eingeführte Zusatzbedingung der Betragsminimierung sollen diese Lösungen eliminiert werden.

Mathematisch läßt sich dies wieder über ein Minimierungsproblem eines Funktinals darstellen:

$$\tilde{V}(\tilde{f}) = \|\tilde{P} - \tilde{G}\tilde{f}\|^2 + \gamma \cdot H(\tilde{f}) = V(\tilde{f}) + \gamma \cdot H(\tilde{f}) \quad (\text{Gl. 5.41})$$

mit Glattheitsmaß  $H(\tilde{f})$

$$H(\tilde{f}) = \|\tilde{f}\|^2 = f_s \cdot f_s \quad (\text{Gl. 5.42})$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum:

$$\frac{\partial}{\partial f_k} \tilde{V}(\tilde{f}) = 0 \quad (\text{Gl. 5.43})$$

$$\frac{\partial}{\partial f_k} \tilde{V}(\tilde{f}) = \frac{\partial}{\partial f_k} V(\tilde{f}) + \frac{\partial}{\partial f_k} (\gamma \cdot (f_s \cdot f_s)) = 0 \quad (\text{Gl. 5.44})$$

1. Eine andere Möglichkeit für ein "Glattheits-Maß" wäre die Summe der Betragsdifferenzen benachbarter Punkte der Lösung; wird in der Literatur als zweite Ableitung bezeichnet.

$$\rightarrow (P_t - \tilde{\mathbf{G}}_{t,s} f_s) \tilde{\mathbf{G}}_{t,k} + \tilde{\mathbf{G}}_{t,k} (P_t - \tilde{\mathbf{G}}_{t,s} f_s) - (\gamma \cdot 2 \cdot f_s \cdot \delta_{s,k}) = 0$$

$$\rightarrow (2 \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{k,t}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{t,s} + 2 \cdot \gamma \cdot \delta_{k,s}) \cdot f_s = 2 \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{k,t}^T \cdot P_t \quad (\text{Gl. 5.45})$$

$$\rightarrow f_s = (\tilde{\mathbf{G}}_{k,t}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{t,s} + \gamma \cdot \delta_{k,s})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{k,t}^T \cdot P_t \quad (\text{Gl. 5.46})$$

oder in vektorieller Form:

$$\tilde{f} = (\tilde{\mathbf{G}}^T \cdot \tilde{\mathbf{G}} + \gamma \cdot \mathbf{1})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{P} \quad (\text{Gl. 5.47})$$

Benutzt man die singuläre Wertzerlegung von  $\tilde{\mathbf{G}}$ , ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{V}^T + \gamma \cdot \mathbf{1})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{P} \\ \rightarrow &= (\mathbf{V} \cdot (\mathbf{W}^2 + \gamma \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{P} \\ \rightarrow &= \mathbf{V} \cdot (\mathbf{W}^2 + \gamma \cdot \mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T)^T \tilde{P} \\ \rightarrow &= \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{W}^2 + \gamma \cdot \mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{U}^T \tilde{P} \end{aligned} \quad (\text{Gl. 5.48})$$

was man zum besseren Vergleich auch schreiben kann als:

$$\tilde{f} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{W} + \gamma \cdot \mathbf{W}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \tilde{P} \quad (\text{Gl. 5.49})$$

oder in Komponentenform:

$$\begin{aligned} f_s &= \mathbf{V}_{s,k} \cdot (w_k \delta_{k,l} + \gamma \cdot \frac{1}{w_k} \delta_{k,l})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{l,t}^T \cdot P_t \\ &= \mathbf{V}_{s,k} \cdot \left( \frac{w_k}{w_k^2 + \gamma} \right) \cdot \delta_{k,l} \cdot \mathbf{U}_{l,t}^T \cdot P_t \end{aligned} \quad (\text{Gl. 5.50})$$

In dieser Darstellung wird die "Stabilisierung" der Inversionsprozedur besonders deutlich: Sehr kleine singuläre Werte  $w_k$  führen durch den im Nenner auftretenden Regularisierungsparameter nicht mehr zu beliebig großen Gewichten in der Summe. Außerdem zeigt sich hier, daß die über das Regularisierungsverfahren erhaltene Lösung für  $\gamma = 0$  mit der Lösung über die Pseudo-Inverse identisch ist. (Eine andere Interpretation der Regularisierungs-Methode wird in Anhang B vorgestellt) Das Problem dieses Verfahren ist, einen geeigneten Werte für den Regularisierungsparameter zu finden.

Eigene Versuche gingen dahin, für das obige Modell-Problem  $\tilde{f}$  über Gl. 5.50 für verschiedene  $\gamma$  auszurechnen. Dabei konnte beobachtet werden, wie die oszillierende Lösung (mit negativen Werten) für kleine, anwachsende  $\gamma$  Werte immer glatter wurde. Ein zu großes  $\gamma$  führte jedoch zu Lösungen mit  $f_s = const$ . Als "beste" Lösung wurde jene ausgewählt, bei der  $\gamma$  den kleinst möglichen Wert annimmt mit der Nebenbedingung, daß alle  $f_s$  größer oder gleich null sind. Prinzipiell zeigten diese Versuche, daß die Regularisierungsmethode ein stabiles Invertierungsverfahren darstellt und recht gut die theoretischen Werte  $\tilde{f}_{theo}$  zurückrechnet. Praktisch ist dieses Verfahren wegen der "experimentellen" Bestimmung von  $\gamma$  sehr aufwendig.

Methoden zur Vorausberechnung des Regularisierungsparameters gibt J. Weese an. [Weese – 89] Ein bewährtes Verfahren stellt die SC-Methode (Self Consistent) dar. Die Idee dieser Methode besteht darin, das  $\gamma$  so zu bestimmen, daß die Abweichung zwischen dem zurückgerechneten  $\tilde{f}_{kor}$  und dem tatsächlichen  $\tilde{f}_{theo}$  minimal wird. Dabei wird das unbekannte tatsächliche  $\tilde{f}_{theo}$  über einen angenommenen, bekannten Fehler aus den Meßwerten über die Pseudoinverse bestimmt. Die entstehende  $\gamma$  abhängige Funktion kann numerisch minimiert werden. Das so bestimmte  $\gamma_{min}$  legt damit den konkreten Ausdruck für das zu minimierende Funktional fest. Da bei dem ermittelten  $\gamma_{min}$  die Positivität der Lösung nicht zwangsläufig erfüllt ist, erfolgt die Funktionalminimierung nach einem in [Stoer – 71] beschriebenen Algorithmus, der die Positivität der Lösung garantiert. Zur Realisierung dieses Verfahrens wurde ein Programm von J. Weese [ftikreg] verwendet, das die konkrete Form der Kernfunktion des Modell-Problems berücksichtigt. Dazu mußte im Programm die Möglichkeit zur Eingabe eines Volterraschen Integraloperators geschaffen werden. (Einführen einer effektiven Kernfunktion über  $\Omega$  ( ) Funktion, siehe Kapitel 4.1)

Die auf diese Weise korrigierten Werte der simulierten Meßwerte des Modell-Problems ( $n_p$  und  $n_f$  wie in Abschnitt 5.2.2) finden sich in Abb. 5.32, 5.34 und 5.36 für die generierten Daten eines Delta-Streuers und in Abb. 5.38, 5.40 und 5.42 für die Daten des Isotrop-Streuers. Der Isotrop-Streuer wird für alle verwackelten Ausgangsdaten gut rekonstruiert. (vergleiche hierzu die die Ergebnisse der Pseudo-Inversen-Methode; Abb. 5.26, 5.28 und 5.30 ) Die Rückrechnung des Delta-Streuers lassen in allen Fällen einen wenn auch verbreiterten Delta-Peak erkennen. Dies trifft sogar für die mit einem absoluten Fehler mit  $\sigma = 0.005$  (entspricht für die maximalen Werte einem relativen Fehler von 25 % !!) verwackelten Daten zu. Trotzdem scheint für den Fall  $\sigma = 0.001$  der Regularisierungsparameter nicht optimal bestimmt. Hierin zeigt sich auch eine gewisse Schwäche der Methode: In vielen Fällen liefert die automatisierte Regularisierung gute Ergebnisse. Trotzdem ist in jedem Einzelfall ihre Anwendungsmöglichkeit über Simulationen zu prüfen. Schon eine Veränderung der Rasterparameter von  $n_f$  und  $n_p$  kann zu deutlichen Veränderung der Lösung führen. Die Ursache liegt im systematischen Fehler den man durch die Einführung des Regularisierungsparameters bzw. der damit verbundenen neuen effektiven Abbildung  $\tilde{f} \rightarrow \tilde{P}$  (siehe Anhang B) macht. Man beachte, daß z. B. für den Fall  $n_f = n_p$  die tatsächlichen Werte für  $f_s$  im Bereich zwischen den chaotisch oszillierenden Werten, die man über die Matrix-Inversion erhält, und den glatten Werten der Regularisierung liegen können. Beide  $\tilde{f}_{kor}$  führen wieder zu den gemessenen Werten. Die  $\tilde{f}_{kor}$  aus der Matrix-Inversion liefern bis auf numerische Rundungsfehler bei der Rückrechnung sogar exakt die Meßwerte.

Im Gegensatz dazu wäre über die Pseudo-Inversen-Methode eine Angabe des Fehlers in

Abhängigkeit der singulären Werte möglich<sup>1</sup>. Diese Methode scheitert aber wie oben erwähnt oft an der nötigen Überbestimmung des Problems. Die damit verbundenen sehr großen Matrizen führen in der Praxis zu einem enormen Bedarf an Rechenleistung und Speicherplatz.

Die Regularisierung stellt also eine praktisch handhabbares Werkzeug dar, das in gewisserweise die "Lösung" einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art ermöglicht. Jedoch ist für das spezielle Problem die Anwendbarkeit dieser Methode über Rückrechnung von simulierten Daten zu prüfen.

Dazu ein Zitat von Richard J. Hanson aus [*Hans* - 72] :

"...What should be clear is that a simple question: "Can you solve eq.(9)<sup>2</sup> " often has an answer which takes a great deal of thought, numerical analysis, research and development, and computer coding. To generalize: as our social and technological needs become greater, so must our investment in research for answers increase, that's just the way it is !"

Im folgenden letzten Kapitel soll die Regularisierungs-Methode für Auswertung von gemessenen Streudaten eines LIM-Streuers angewendet werden.

---

1. Auf die Fehleranalyse bei der Pseudo-Inversen Methode wurde verzichtet, da sie letztlich für die Korrektur von realen Meßdaten nicht zum Einsatz kam.

2. Gleichung 9 ist eine spezielle Fredholmsche Integralgleichung erster Art aus der Immunologie.

# Korrektur des Delta-Streuer durch Regularisierungs Methode

$\dot{P}_{real-theo}$

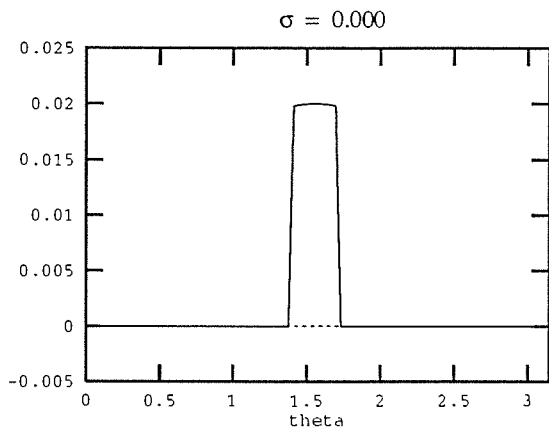


Abbildung 5.31

$\tilde{f}_{kor}$

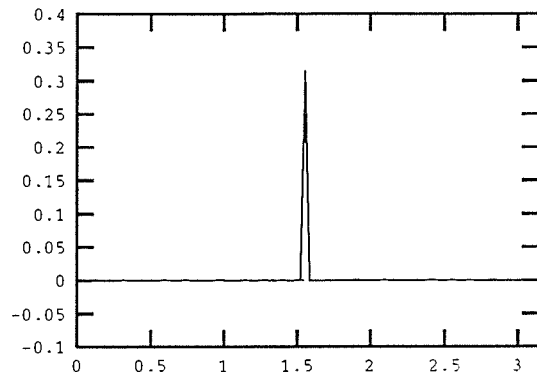


Abbildung 5.32

$\dot{P}_{real-theo}$

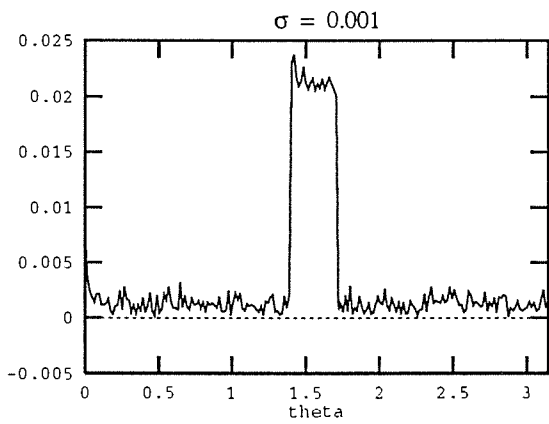


Abbildung 5.33

$\tilde{f}_{kor}$

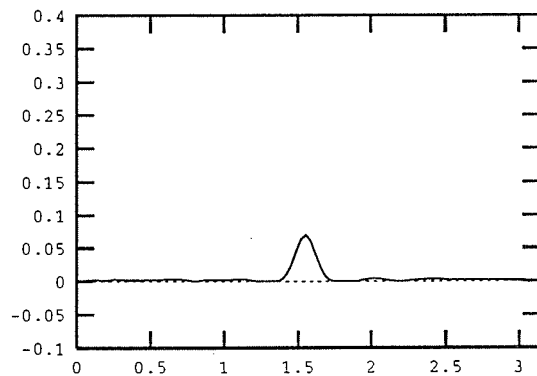


Abbildung 5.34

$\dot{P}_{real-theo}$

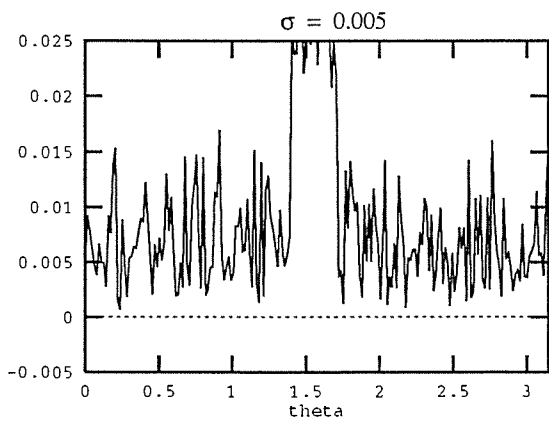


Abbildung 5.35

$\tilde{f}_{kor}$

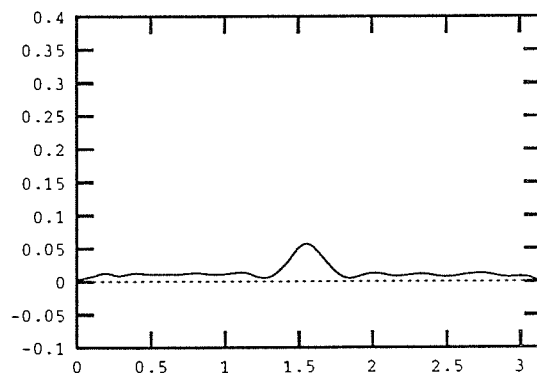


Abbildung 5.36

# Korrektur des Isotrop-Streuers durch Regularisierungs-Methode

$\vec{P}_{real-theo}$

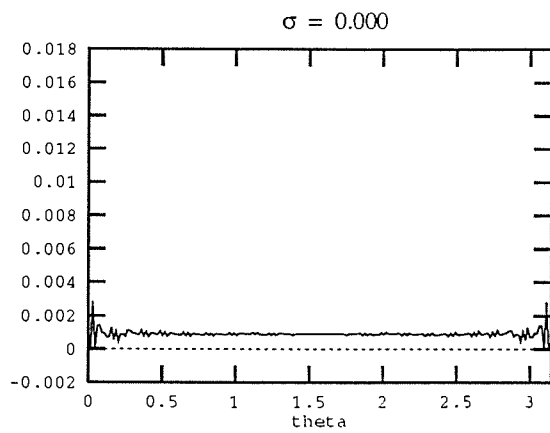


Abbildung 5.37

$\vec{f}_{kor}$

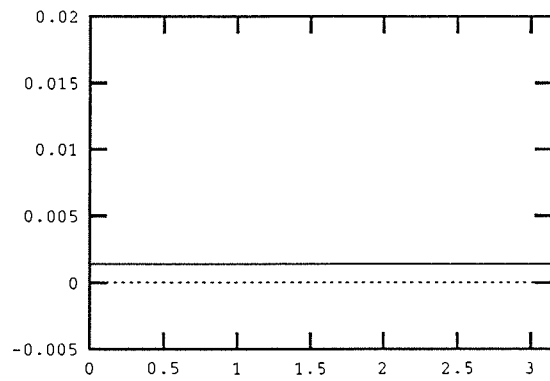


Abbildung 5.38

$\vec{P}_{real-theo}$

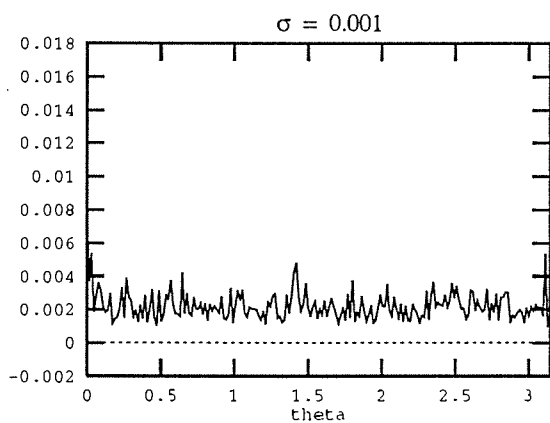


Abbildung 5.39

$\vec{f}_{kor}$

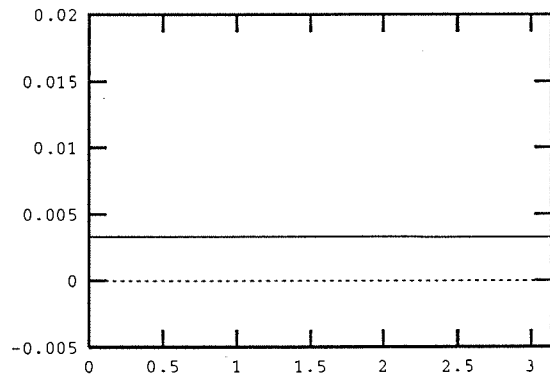


Abbildung 5.40

$\vec{P}_{real-theo}$

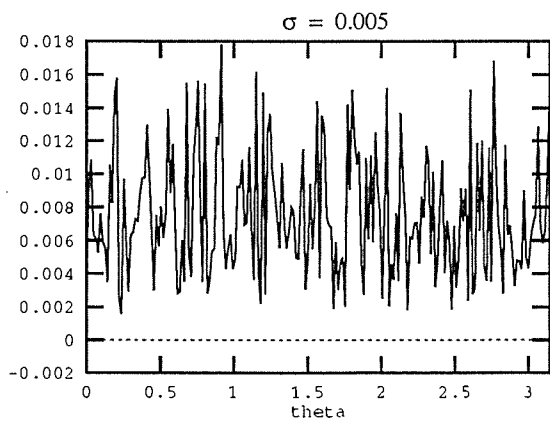


Abbildung 5.41

$\vec{f}_{kor}$

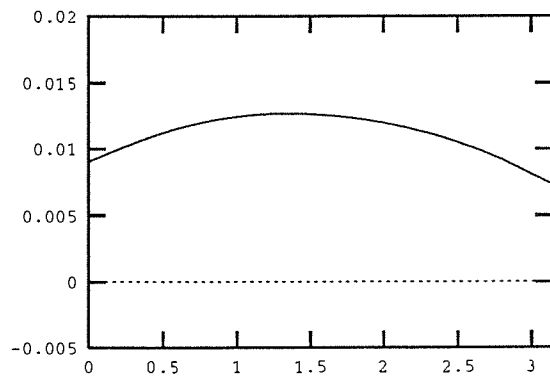


Abbildung 5.42



## 6.) Kösterelemente als Beispiel für homogene, optisch dünne LIM's des 2-dim Falls

In diesem Kapitel soll nun der ganze Klassifikations-Meß-Auswerte-Formalismus am Beispiel der sogenannten Kösterelemente angewendet werden.

Kösterelemente: ein Auszug aus der Patentschrift von H. Köster [Köest - 80] zu den nach ihm benannten Lichtlenkprofilen:

“Eine Vorrichtung zur automatischen Steuerung des direkten Sonnenlichteinfalls, die aus lichtdurchlässigen Wandteilen und aus lichtundurchlässigen Elementen besteht. Die Steuerung erfolgt durch Spiegeleffekte, die von dem Einstrahlungswinkel der Sonne abhängen. .... Die lichtundurchlässigen Elemente können ebene oder besonders gestaltete Spiegel sein. Die besonders gestalteten Profilspiegel bilden Konzentrationstrichter und Ausstrahlungstrichter .... “

### 6.1) Theorie, Klassifikation und Behandlung mit Raytracing-Methoden

Untersucht werden sollen konkret die von der Firma OKALUX hergestellten Lichtlenk-elemente OKASOLAR. Bei diesen handelt es sich um spiegelnde Stahlprofile mit charakteristischem Querschnitt (siehe Abb. 6.3), die mit bestimmter Neigung und Abstand parallel angeordnet zwischen zwei Glasscheiben zu Elementen zusammengesetzt werden. Eingesetzt in Fensterflächen von vor allem Büro- und Industriebauten sollen sie einerseits einen passiven Sonnenschutz vor der hoch stehenden Sommersonne bieten und andererseits eine Lichtlenkung an die Decke bzw. in die Raumtiefe bewirken.

Dem in Kapitel 1 entwickelten Klassifikationsschema folgend handelt es sich bei diesen Elementen um homogene, optisch dünne LIM's des 2-dim Falls:

Homogen bzw. effektiv homogen sind diese Elemente wegen ihrer periodischen Anordnung. Zwar variiert das Abstrahlverhalten bei einer Rasterung der Abstrahlfläche, die kleiner als das Quadrat des Abstand der Profile ist. ( Größenordnung des Profilabstandes liegt bei 1.5 cm ) Für die Charakterisierung von Quadratmeter großen Flächen können diese Elemente jedoch als effektiv homogen behandelt werden.

Optisch dünn sind die Elemente deswegen, weil benachbarte Spiegelprofile einen Reflexionskanal bilden, der nur eine lokale “Lichtstreuung” zuläßt. Genau genommen muß das Kriterium optisch dünn im Zusammenhang mit dem Klassifikation als 2-dim Fall gesehen werden: In Anhang C wird gezeigt, daß das totale Streuverhalten vollständig durch die Reflexionen des zugeordneten 2-dim Problems in der Profil-Querschnittsfläche festgelegt ist. Strahlen, die nicht in dieser Ebene liegen, werden in einen Anteil senkrecht und parallel zu dieser Ebene aufgespalten. Der senkrechte Anteil passiert ungehindert das Element. Der Anteil parallel zu der Querschnittsebene wird entsprechend der Querschnittsgeometrie reflektiert.

Das heißt, die Elemente sind als optisch dünn zu klassifizieren, weil in dieser Ebene durch die Spiegelkanalwirkung nur lokale “Lichtstreuung” zugelassen wird. Trotzdem können Lichtstrahlen, die nicht in dieser Querschnittsebene liegen, das Element an einem dem Ein-

fallsort nicht gegenüberliegenden Ort auf der Abstrahlfläche verlassen.

Die weiteren Untersuchungen beschränken sich deswegen auf das Reflexionsproblem in der Querschnittsebene. Da die recht komplizierte Geometrie eine analytische Behandlung des Strahlungstransportes nicht erlaubt, wurde ein Raytracing Programm in C zur Simulation der Lichtreflexion in diesen Elementen geschrieben. Das Programm erlaubt die Behandlung von beliebigen, spiegelnden Strukturen in 2 Dimensionen. Für die Eingabe der Geometrie wurde eine "Geometrie-Sprache" entwickelt, die das Zusammensetzen von komplexen Objekten aus Grundelementen wie Geraden, Kreisbögen, Kreisevolventen und Parabelbögen gestattet. Diese Grundelemente können über Bearbeitungsrountinen wie kopieren, skalieren, spiegeln, drehen und rotieren modifiziert werden. Der Reflexionsgrad der jeweiligen Elemente ist frei wählbar.

Von einem vorgegebenen optischen Eingang werden Strahlen unter bestimmtem Winkel losgeschickt und ihr Weg durch das spiegelnde System verfolgt, bis sie diesen Eingang (Reflexions-Fall) oder einen definierten Ausgang (Transmissions-Fall) erreichen. Dabei wird der Auftreffwinkel registriert, der eine Aussage über das winkelabhängige Streuverhalten erlaubt. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die durch eine Scheibe am Ein- und Ausgang des Systems entstehende Änderung der Transmission und Reflexion zu simulieren. (Verwendung der Fresnel-Formeln für unpolarisiertes Licht)

Die Daten des winkelabhängigen Streuverhaltens gestatten zusätzlich noch durch Aufsummierung die Berechnung der Gesamt-Reflexion bzw. Transmission.

Die errechneten Strahlengänge können graphisch sowohl auf Bildschirm als auch als HPGL-Datei ausgegeben werden.

Zunächst wurde das Programm für zwei Geometrien mit bekannten Reflexions-Eigenschaften getestet:

- 1.) Parabel mit einfallenden Strahlen parallel zur Symmetrieachse
- 2.) Kreisbogen mit einfallenden, parallelen Strahlen

Die Strahlengänge zeigen das erwartete Verhalten. Bei der Kreisgeometrie entsteht die bekannte Kreiskatakaustik wie man sie z.B. bei Lichtreflexionen in zylindrischen Gefäßen (Kaffetasse) beobachtet. (siehe Abb. 6.1) Man beachte, daß neben den beiden deutlichen Kreisevolventenbögen noch andere einhüllende Kurven existieren. Diese resultieren aber aus Strahlen die am linken bzw. rechten Rand in das System eintreten und dieses deswegen über drei oder mehr Reflexionen passieren. Deshalb sind diese Kurven bei Spiegelungen an der Wand einer Tasse wegen des geringen Reflexionsgrades ihrer Oberfläche auch meist nicht zu beobachten. Um dagegen den Haupt-Kreisevolventenbogen entstehen zu lassen, muß ein Lichtstrahl nur einmal zu einem merklichen Anteil reflektiert werden.

Bei der Parabelgeometrie zeigt sich die erwartete Ausbildung eines Brennpunkt für die parallel zur Parabelachse einfallenden Strahlen. (siehe Abb. 6.2) Weitere Experimente mit dieser Geometrie bei schräg einfallenden Strahlen führten zu charakteristischen Einhüllenden, die einen Bereich um den Parabelbrennpunkt begrenzen, der von keinem Strahl passiert wird. Dies führte zur Idee für einen neuen "idealen Konzentratoren"<sup>1</sup> analog zum bekannten Compound Parabolic Concentrator (CPC), aber mit Spiegelfläche hinter dem Absorber. Der Absorber selbst ist dann nicht mehr planar, sondern hat einen Querschnitt,

---

1. "idealer Konzentratoren" bedeutet, daß das optische System alle Strahlen, die den optischen Eingang innerhalb eines sogenannten Akzeptanz-Winkelbereichs treffen, zum Ausgang des Systems gelangen. Die Veränderung der "Strahldichte" ergibt sich aus dem Liouvillschen Theorem

der der Form der einhüllenden Kurve entspricht. In wie weit ein solcher Aufbau wirklich zu einem "idealen Konzentrador" führt, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden.

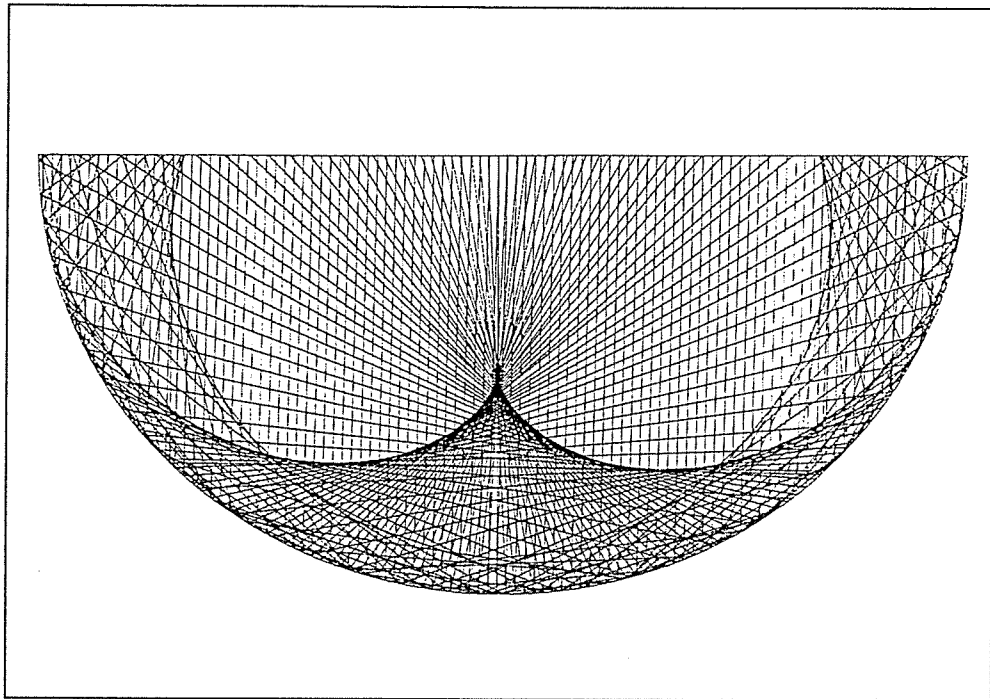


Abb. 6.1  
Strahlengang in einem Kreisbogen

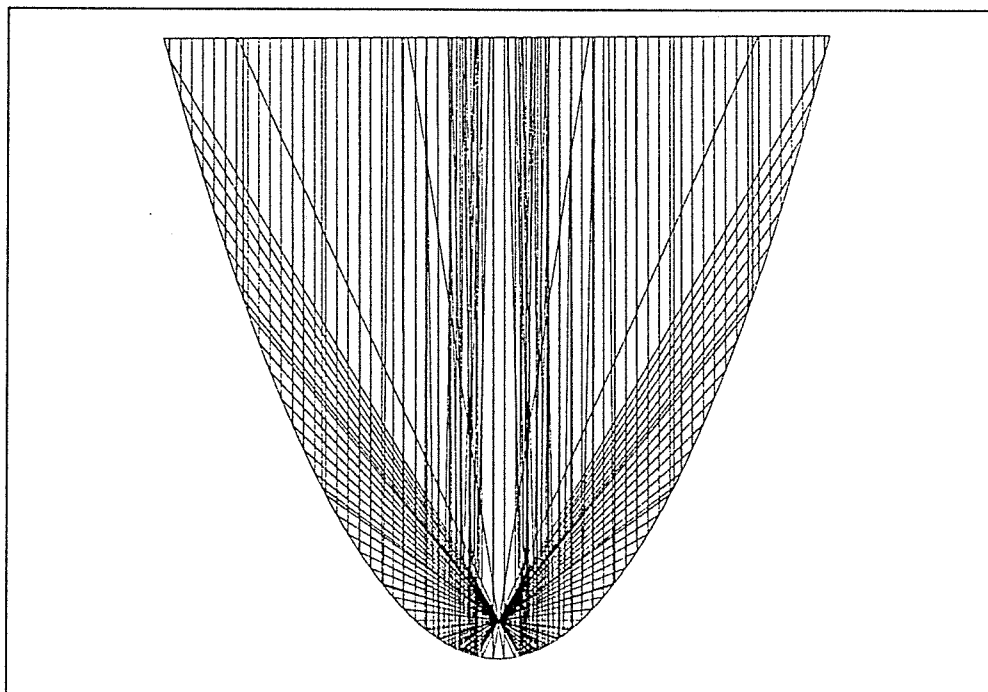


Abb. 6.2  
Strahlengang in einem Parabelbogen

Mit diesem so getesteten Raytracing-Programm konnte nun das Lichtlenk-Profil simuliert werden. Anhand der Konstruktionszeichnung wurde das Einzelprofil durch Zusammensetzen mehrerer Kreisbögen unterschiedlicher Radien und Winkelbereiche eingegeben. (siehe Abb. 6.3)

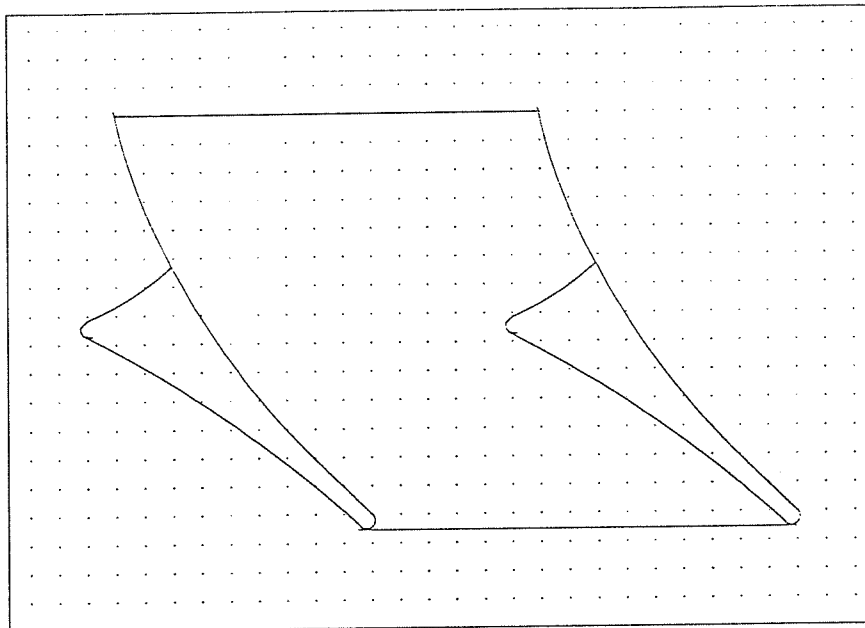


Abb. 6.3  
Querschnitt des Lichtlenk-Profiles W\_55\_15

Die Abbildungen 6.4 bis 6.9 zeigen die Strahlengänge für ein W\_55\_15 Profil bei unterschiedlichen Einfallswinkeln. Als Profilreflexionsgrad wurde ein gemessener Integralwert (über das Sonnenspektrum) von 0.7 gewählt. Zur besseren Darstellung der Richtung der ausfallenden Strahlen ist in den Strahlengang hinter den Profilen eine "Detektionskugel" eingefügt. Die Strahlintensität nach Reflexionverlusten wird durch kleine Balken an der Auftreffstelle der Kugeloberfläche dargestellt. Die Ausrichtung der Profile entspricht der üblichen Anordnung in senkrechten Fensterflächen.

Aus Abb. 6.5 bis 6.10 geht die Grundidee für die Wirkungsweise der Elemente hervor: Bei großen Einfallswinkeln (hohen Sonnenständen) trifft das von links einfallende Licht auf den großen Profilbogen und wird dann über weitere Reflexionen an dem gegenüberliegenden Profil wieder nach außen gespiegelt. Bei flacher werdendem Einfallswinkel entsteht eine Situation, wo alle vom großen Profilbogen reflektierten Strahlen hinter der Selektionskante auf den kleinere Profilbogen treffen und durch dessen Neigung in den oberen Halbraum gelenkt werden. Das Profil hat damit auf vollständige Transmission "umgeschaltet". Zusätzlich zu dem umgelenkten Licht gibt es noch einen Anteil von Strahlen, die das Profil ohne Reflexionen passieren. Dieser Anteil nimmt für kleinere Einfallswinkel (niedrige Sonnenstände) zu.

In Abb. 6.11 bis 6.13 ist das komplette Streuverhalten dieses Profiltyps, das sich aus den Simulationen ergibt, in verschiedenen Ansichten dargestellt. Die Streufunktion - Anteil der

gestreuten Strahlen in einem bestimmten Winkelbereich bei vorgegebenem Einfallswinkel - ist als Gebirge über der Ebene gegen Einfallswinkel  $\theta_{ein}$  und Ausfallswinkel  $\theta_{aus}$  aufgetragen. (siehe schematische Darstellung in Abbildung 6.3.1) Beide Winkel variieren im Bereich von  $-90$  grad. bis  $+90$  grad. Konventionsgemäß entspricht ein Winkel von  $0$  grad. einer Strahlrichtung senkrecht zur Einfalls- bzw. Ausfallsfläche.

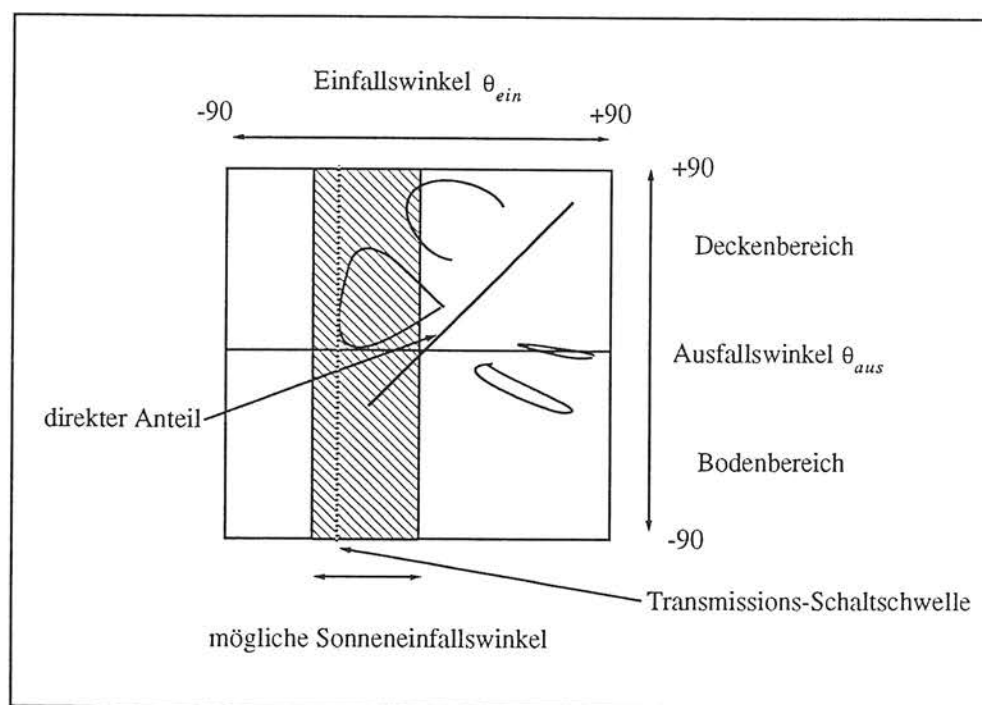


Abb. 6.3.1  
Schematische Darstellung des Streuverhaltens  
des W\_55\_15 Profils bei senkrechtem Einbau in einen Testraum

Auffallend ist der schräg durchlaufende mittlere "Kamm" des direkt durchgehenden Anteils. Die aufstetenden Zacken sind kein realer Effekt, sondern durch die Winkelrastrung bedingt. Gut sichtbar ist die Transmissions-Schaltchwelle des Elements. Auch der oben beschriebene Effekt des anwachsenden direkten Anteils bei kleiner werdenden Einfallswinkel ist sichtbar. Auffällig ist jedoch auch der relativ geringe Anteil des umgelenkten Lichts, was maßgeblich auf die dazu notwendige Mehrfach-Reflexion bei recht niedrigem Profil-Reflexionsgrad zurückzuführen ist. ( Ein Reflexionsgrad von 0.7 führt schon bei 2-fach Reflexion zu optischen Verlusten von ca. 50 % )

In Abb. 6.4 ist die integrierte Gesamt-Transmission aufgetragen. Der Winkelbereich zwischen  $-50$  grad. und  $0$  grad. entspricht bei senkrechtem Elementeinbau den möglichen Sonnenhöhenwinkeln bzw. dem auf die Profilquerschnittsfläche projizierten Höhenwinkel. Deutlich erkennt man im Bereich von  $-30$  grad. bis  $-15$  grad. das "Durchschalten" des Elements. Durch Veränderung der Profilneigung im Gesamt-Element kann diese Schaltchwelle in gewissem Umfang verschoben werden.

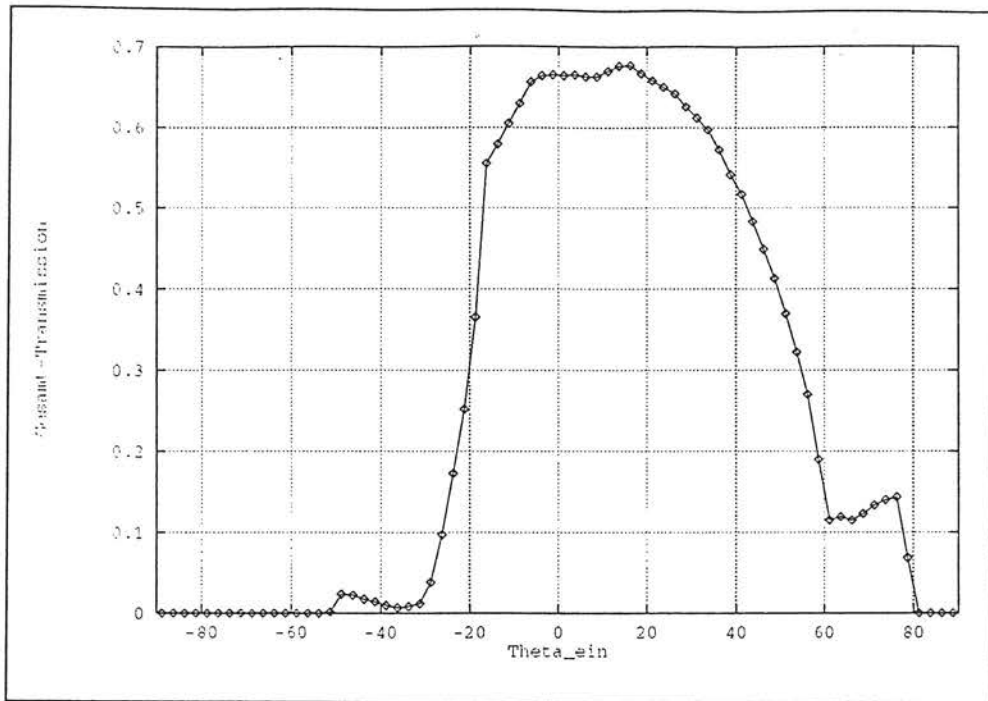
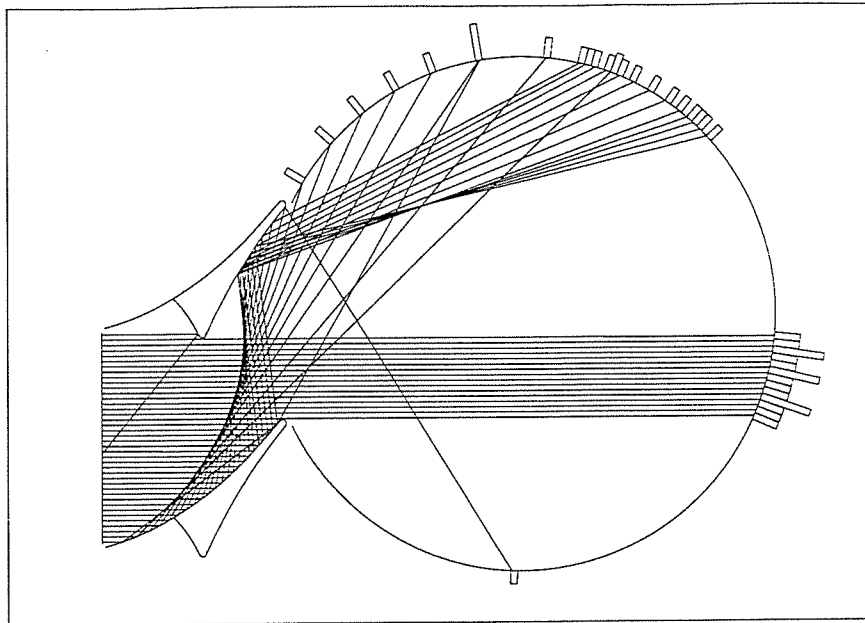


Abb. 6.4  
 Integrierte Gesamt-Transmission  
 des Lichtlenk-Profiles W\_55\_15

Diese theoretischen Daten bilden eine Vergleichsbasis für gemessene und dann über das Regularisierungs-Verfahren korrigierten Daten.

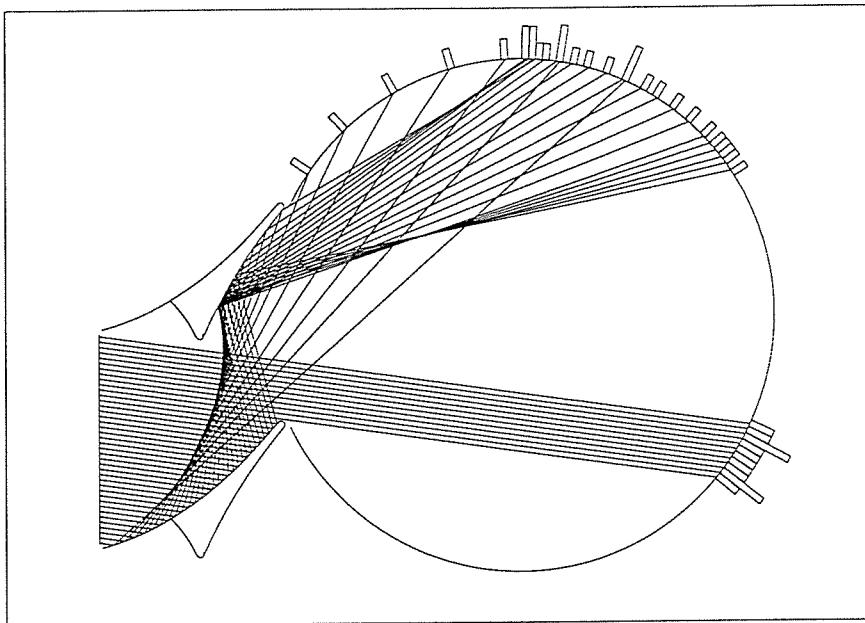
$\theta_{ein} = 0^\circ$

Abb. 6.5



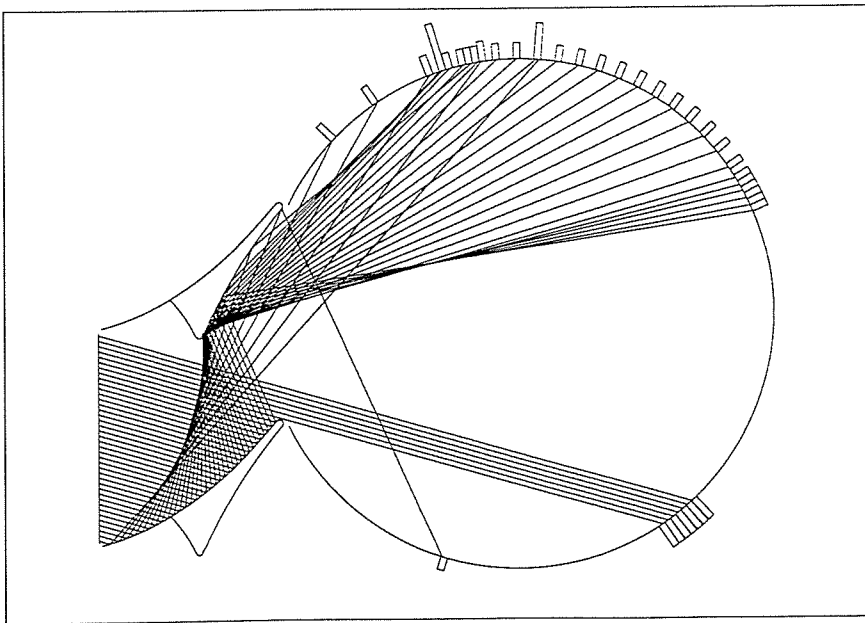
$\theta_{ein} = -8^\circ$

Abb. 6.6



$\theta_{ein} = -16^\circ$

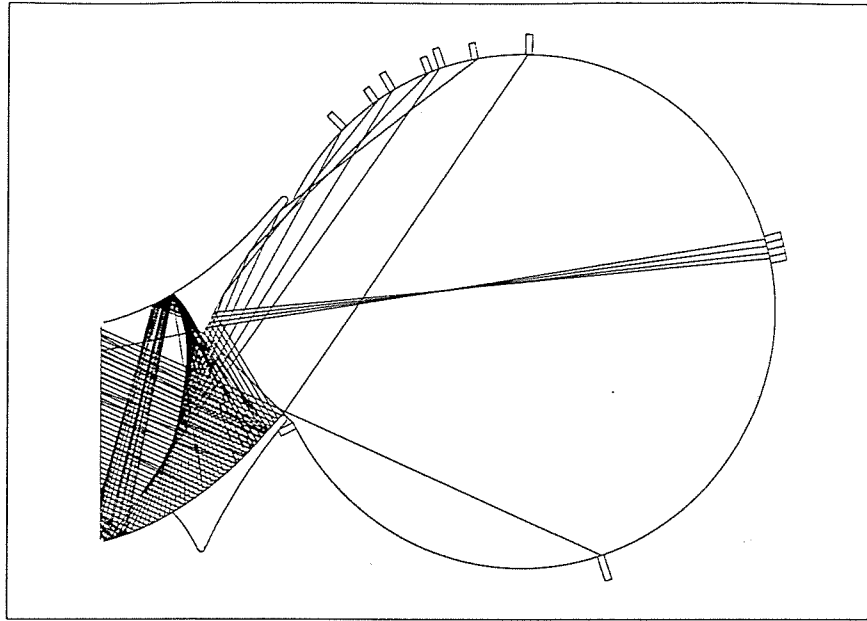
Abb. 6.7



# Strahlengang in Kösterelementen

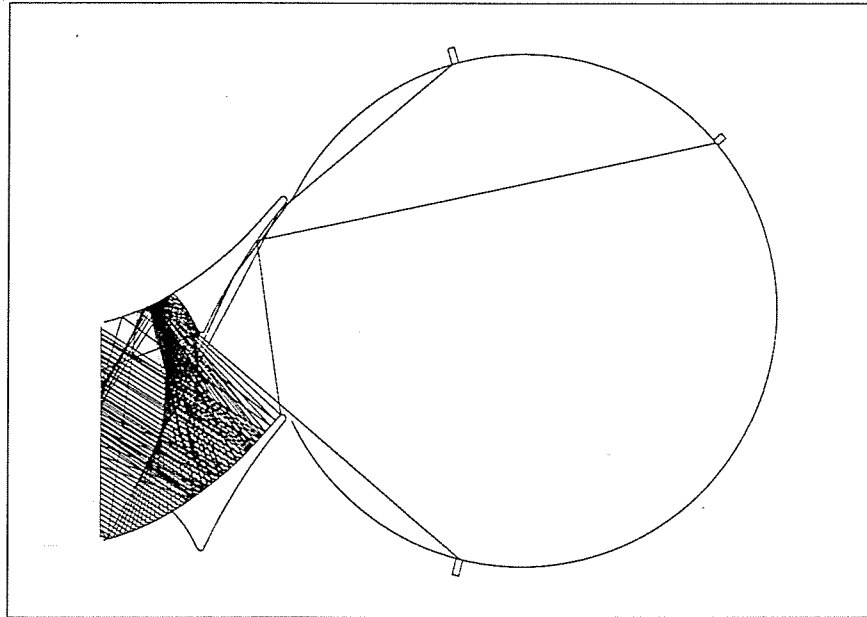
$$\theta_{ein} = -24^\circ$$

Abb. 6.8



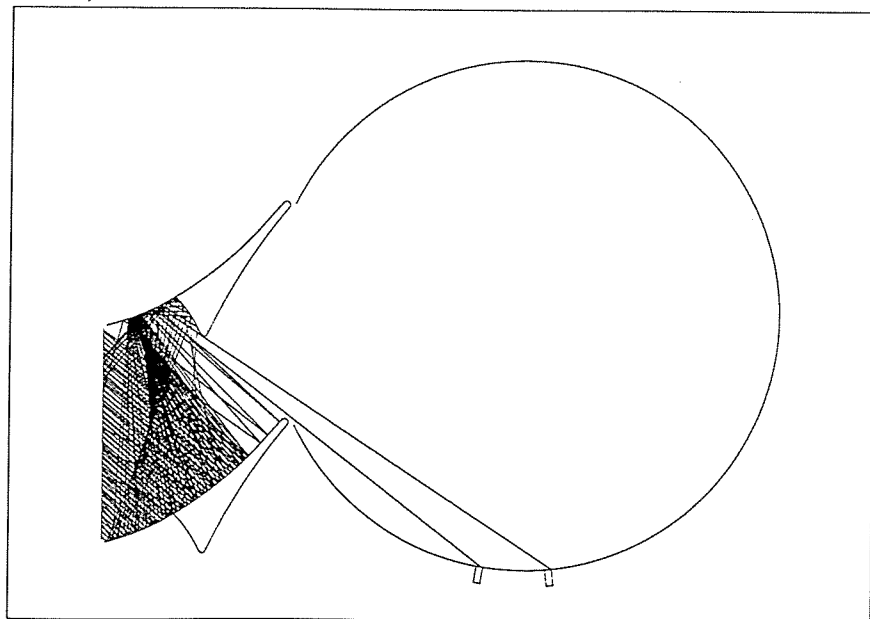
$$\theta_{ein} = -32^\circ$$

Abb. 6.9



$$\theta_{ein} = -40^\circ$$

Abb. 6.10





# Streuverhalten eines Kősterelements

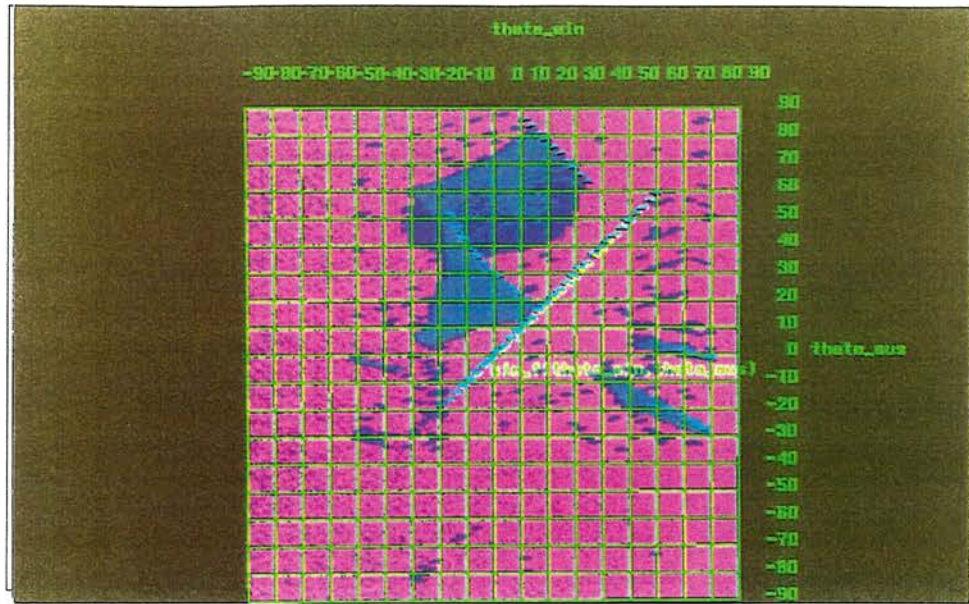


Abb. 6.11

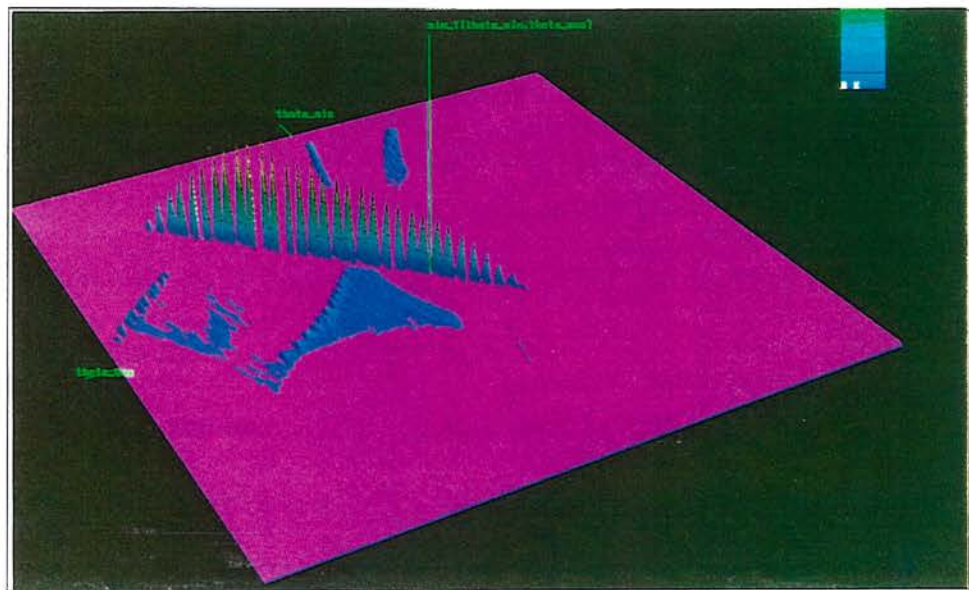


Abb. 6.12

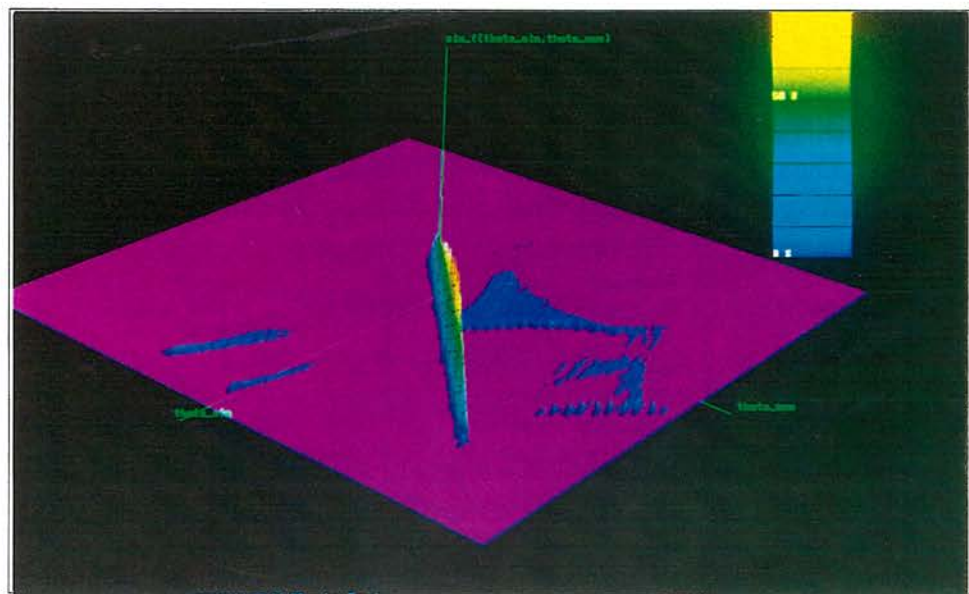


Abb. 6.13

## 6.2) Messung des winkelabhängigen Streuverhalten mit anschließender Datenkorrektur

Mit dem in Kapitel 3 beschriebenen Meßaufbau wurde nun für das Lichtlenkprofil W\_55\_15 das winkelabhängige Streuverhalten in der Profilquerschnittsebene gemessen. Die Probenbeleuchtung wird als parallel und inhomogen angenommen.

Daten zum Meßaufbau:

Abstand Probenmitte-Solarzelle:	$r = 100\text{cm}$
Probenbreite:	$2 \cdot b = 36\text{cm}$
Solarzellenbreite:	$2 \cdot c = 2\text{cm}$
Einfallswinkel :	$\theta_0 \in [-50^\circ, 50^\circ]$
Einfallswinkelrasterung:	$\Delta\theta_0 = 5^\circ$
Ausfallswinkel:	$\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$
Ausfallswinkelrasterung:	$\Delta\theta = 0.14^\circ$

Daten zur Korrektur:

Rasterung der Meßwerte:	$n_p = 400$
Rasterung der Streufunktion:	$n_f = 200$
Ort auf der Probe:	$x \in [-18.0\text{cm}, 18.0\text{cm}]$

Ansatz für Probenbeleuchtung.

$$bel(x) = \exp\left(-\frac{(\sin\theta_0 \cdot x)^2}{k_1}\right) \cdot \sin\theta_0 \cdot k_2$$

Zur Beschreibung der Probenbeleuchtung wurde der Ansatz einer Gaußfunktion<sup>1</sup> mit freiem Fitparameter  $k_1$  und  $k_2$  gemacht. Um diesen zu bestimmen, wurde eine Messung ohne Probe mit einer der Probengröße entsprechenden Schlitzblende vorgenommen. Dies entspricht einem Delta-Streuer, wofür die Theorie die folgende Voraussage liefert:

$$P(\theta) = \int_0^\pi d\bar{\theta} \cdot \bar{g}(\theta, \bar{\theta}) \cdot \delta(\bar{\theta} - \theta_0) \quad (\text{Gl. 6.1})$$

1. Dieser nicht physikalisch motivierte Ansatz erweist sich als gute Wahl zur Beschreibung der Probenbeleuchtung; ein physikalischer Ansatz müßte die Parabelgeometrie und die Abstrahl-Charakteristik der Lampe berücksichtigen.

$$P(\theta) = \tilde{g}(\theta, \theta_0)$$

$$= bel(x(\theta, \theta_0)) \cdot \frac{\sin\theta}{(\sin\theta_0)^2} \cdot r(\theta) \cdot (|\gamma_1(\theta, \theta_0)| + |\gamma_2(\theta, \theta_0)|) \cdot \Omega(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$$

( Gl. 6.2 )

Die theoretische Kurve wurde über eine entsprechende Wahl des freien Fitparameters an die Meßwerte angepaßt.<sup>1</sup>

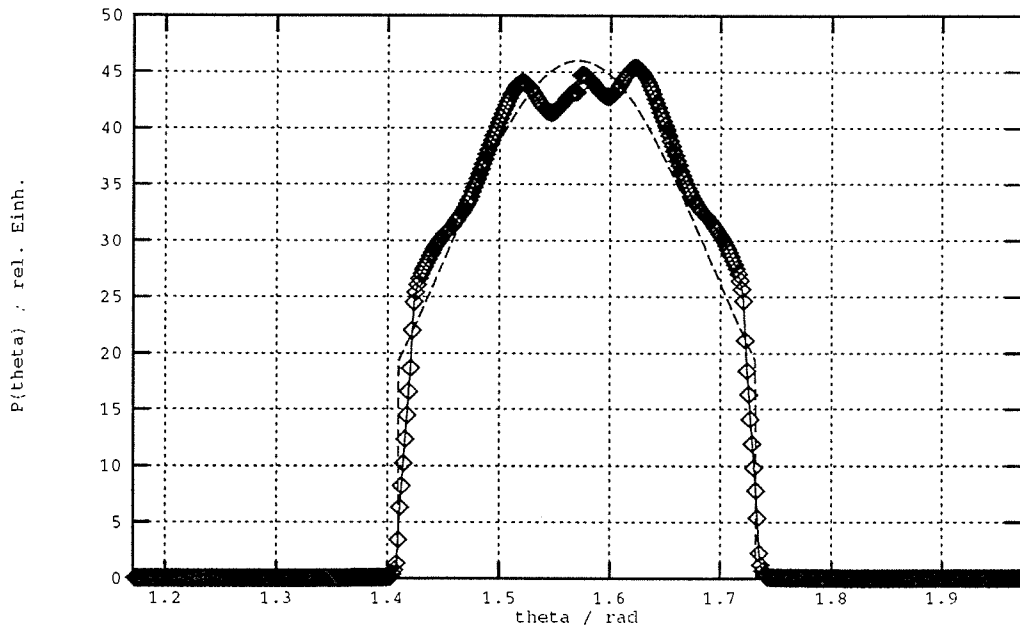


Abb. 6.14  
Vergleich: theoretischer Delta-Streuer (gestrichelte Linie - Gl.6.2)  
mit gemessenem Delta-Streuer (Linie mit Punkten)

Abb. 6.14 zeigt den Vergleich von Theorie und Messung für Fitparameter  $k_1 = 0.03$  und  $k_2 = 23.0$ . Man beachte die sehr gute Vorhersage der Peakbreite.

Bei anderen Einfallswinkeln sieht die schräg stehende Probe den Gauß-Peak der räumlichen Intensitätsverteilung nur in einem effektiven Bereich  $-b \sin\theta_0$  und  $b \sin\theta_0$  mit einer um  $\sin\theta_0$  reduzierten Gesamt-Intensität. Daraus resultiert obiger Ausdruck für  $bel(x)$ .

Die Meßzeit betrug pro Einfallswinkel ca. eine halbe Stunde. Damit konnte das Profil für den oben angegebenen Winkelbereich bei einer Rasterung von 5 grad. Schritten in ca. 6 Stunden vermessen werden.

Die so erhaltenen Meßwerte wurden mit dem in Kapitel 5 beschriebenen Regularisierungsverfahren korrigiert. Die Rechenzeit mit den oben angegebenen Rasterparametern liegt pro Datensatz eines Einfallswinkels im Bereich von einer Minute. Dies hängt aber extrem von

1. Der Winkelbereich von 0 rad bis  $\pi$  rad in Abb. 6.14 bis 6.17 entspricht einem Bereich von -90grad bis 90grad in Abb. 6.3.1 und Abb. 6.18 f. .

der Wahl der Rasterparameter  $n_f$  und  $n_p$  ab. (siehe dazu [Weese - 89] )

Für senkrechten Einfallswinkel soll die Datenkorrektur explizit vorgeführt werden. Abb. 6.15 zeigt die eigentlichen Meßwerte und die aus den korrigierten Werten  $\tilde{f}_{kor}$  über  $\tilde{G}$  zurückgerechneten "Meßwerte". (siehe Kapitel 4.3)

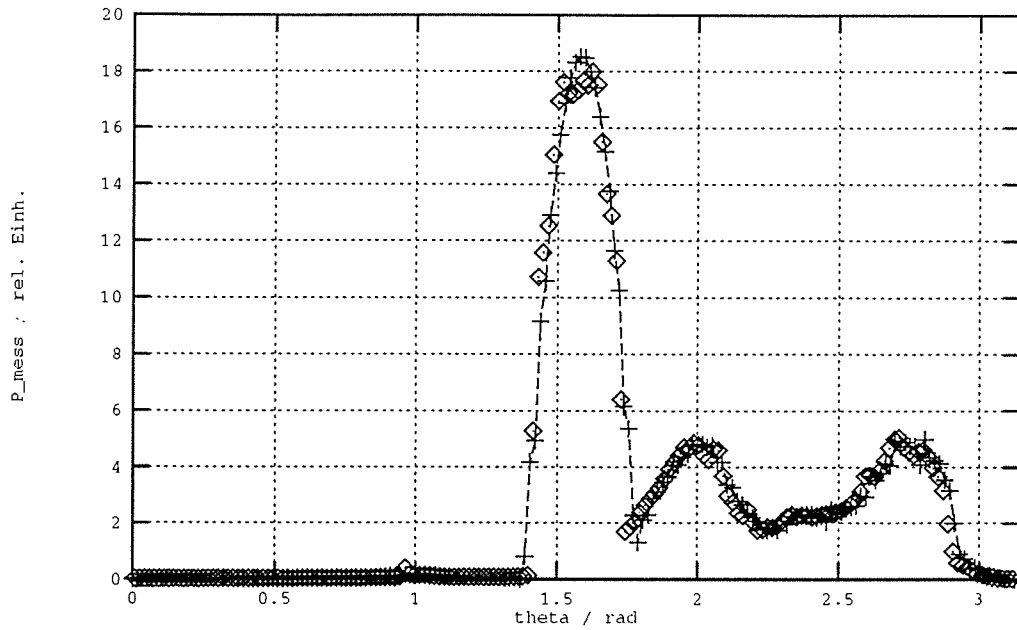


Abb. 6.15  
Vergleich: Meßwerte (Rauten) mit den aus  $f_{kor}$   
zurückgerechneten Meßwerten (gestrichelte Linie mit Kreuzen)

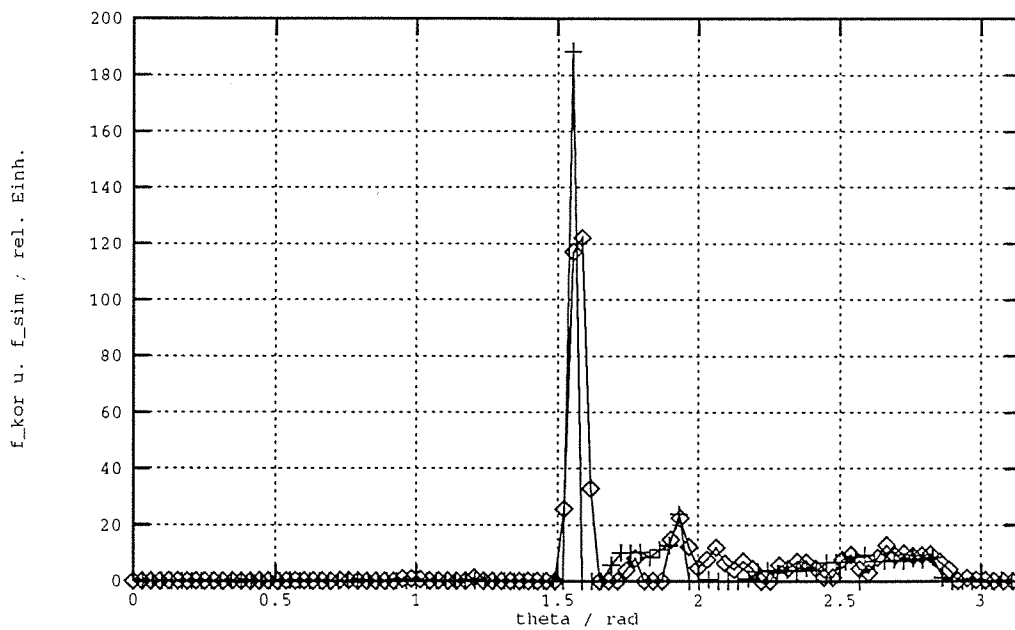


Abb. 6.16  
Vergleich: korrigierte Meßwerte (Rauten)  
mit simulierter Streufunktion (Kreuze)

Die zurückgerechneten "Meßwerte" reproduzieren die Daten sehr gut, was auf ein korrektes Modell der Integral-Kernfunktion hindeutet. In Abb. 6.16 sind die über das Regularisierungsverfahren korrigierten Meßwerte  $\tilde{f}_{kor}$  und die mit dem Raytracing-Programm simulierten Werte  $\tilde{f}_{sim}$  dargestellt. Der Vergleich der korrigierten mit den gemessenen Werten zeigt als Haupteffekt das "Zusammenziehen" des mittleren Peaks durch das Korrekturverfahren. Dieser breite Meßpeak resultiert aus dem direkt durchgehenden, nicht reflektierten Lichtanteil. Seine Breite hängt direkt mit dem konkreten Meßaufbau, d.h. dem Radius der Detektorbahn und der Probenbreite zusammen. Ein sinnvolles Korrekturverfahren muß aus den Meßdaten die von der Detektorgeometrie unabhängige Information extrahieren. Der direkte Anteil sollte durch die Korrektur zu einem "δ-peak" zusammengezogen werden. Genau dies sieht man in Abb. 6.16. Die Simulation sagt auch gerade so einen schmalen "δ-peak" bei  $\theta = \pi/2$  voraus. Auch im restlichen Winkelbereich stimmen die berechneten Werte mit den korrigierten Meßwerten recht gut überein. (siehe Abb. 6.17) Auffallend ist noch ein Neben-Peak bei  $\theta \approx 1.85$  der erst in den korrigierten Daten signifikant auftaucht. Hierbei handelt es sich um den zweifach reflektierten Anteil in den oberen Halbraum. (siehe Abb. 6.4) Auch dieser Peak wurde in der Simulation vorhergesagt.

Abb. 6.18 bis 6.20 zeigen nochmal die simulierten Daten für einen Einfallswinkelbereich von  $[-50^\circ, 50^\circ]$ . Um den geringen, gestreuten Lichtanteil besser sichtbar zu machen, wurde eine logarithmische Auftragung verwendet. Abb. 6.21 bis 6.23 zeigen die Meßwerte und Abb. 6.24 bis 6.25 die daraus errechnete Streufunktion in gleicher logarithmischer Auftragung. Der Vergleich der simulierten mit den korrigierten Werten zeigt als Haupt-Effekt wieder das Zusammenziehen des "Mittelkamms", der durch den direkten, nicht umgelenkten Lichtanteil entsteht. Auch alle charakteristischen Strukturen des "Gebirges" finden sich in beiden Datensätzen. Damit ist für die Auswertung der Streudaten dieses Profils die Leistungsfähigkeit des Invertierungsalgorithmus gezeigt. Außerdem wird deutlich, daß das entwickelte Simulations-Programm ein geeignetes Werkzeug zur Voraussage des Streuverhaltens von Lichtlenkprofilen darstellt.

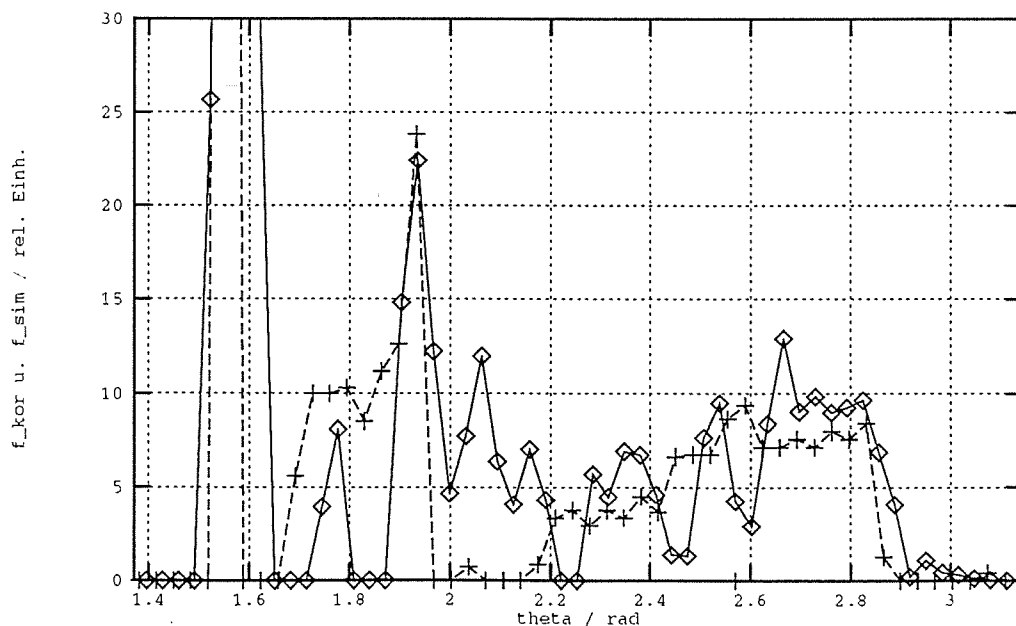


Abb. 6.17  
Vergleich: korrigierte Meßwerte (Rauten)  
mit simulierter Streufunktion (Kreuze)

# Die simulierten Streudaten $\bar{f}_{sim}$

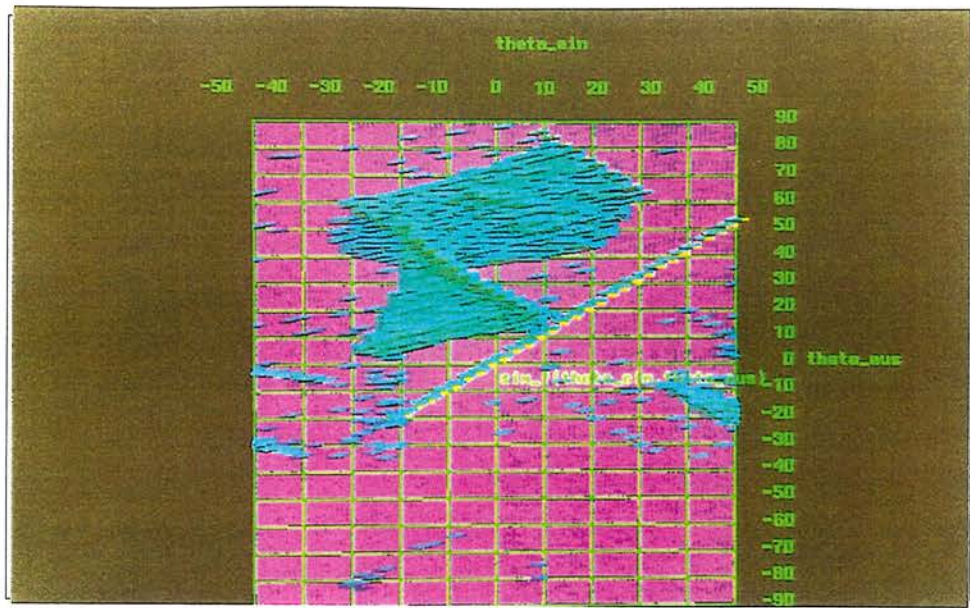


Abb. 6.18

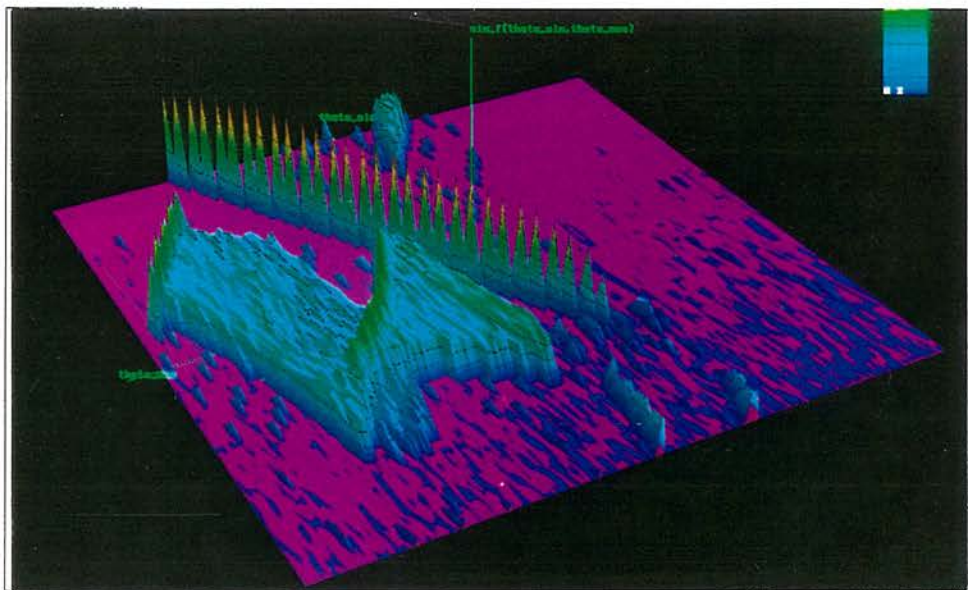


Abb. 6.19

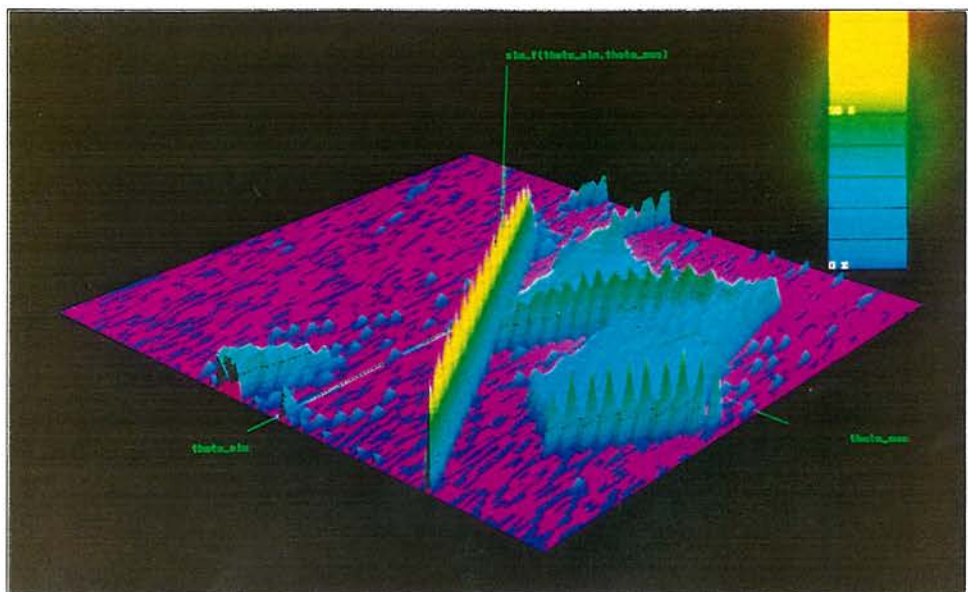


Abb. 6.20

# Die Meßwerte $\vec{p}_{\text{mess}}$

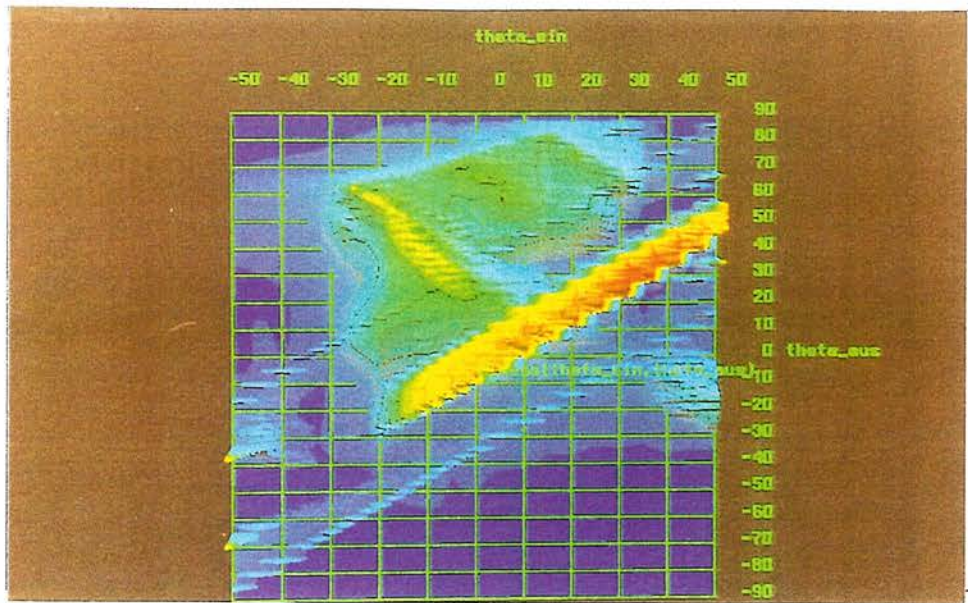


Abb. 6.21

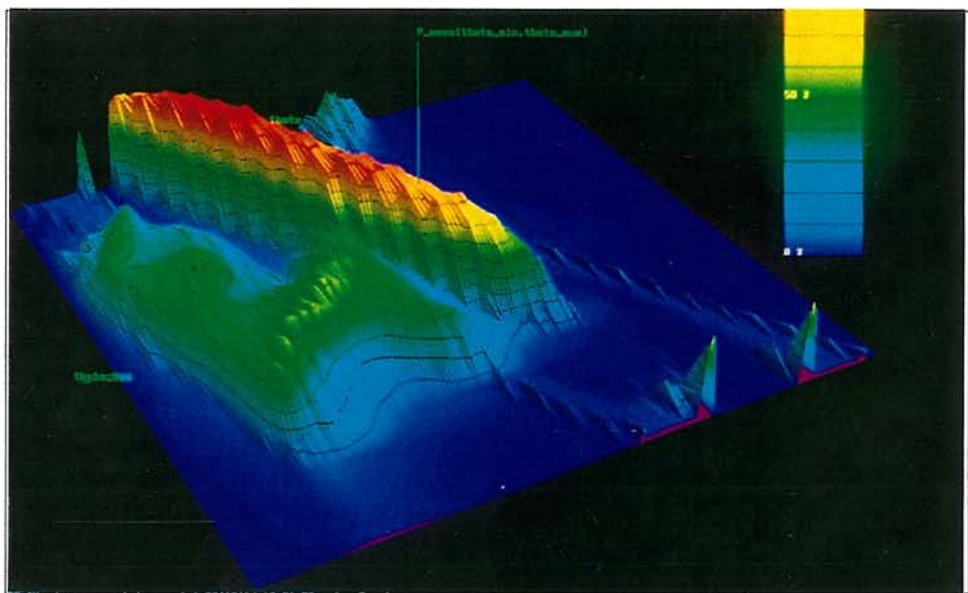


Abb. 6.22

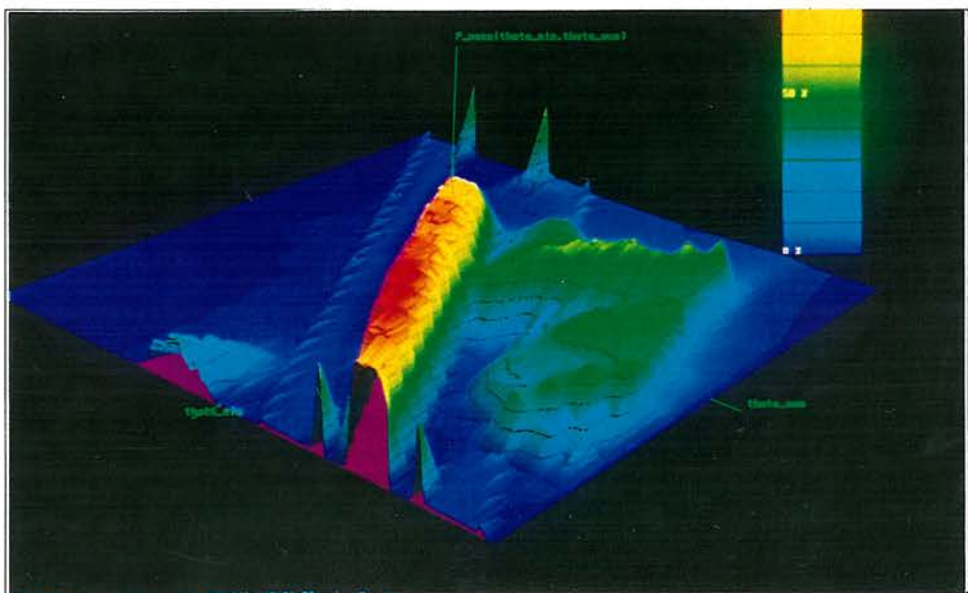


Abb. 6.23

Die korrigierten Meßdaten - Streufunktion  $\bar{f}_{kor}$

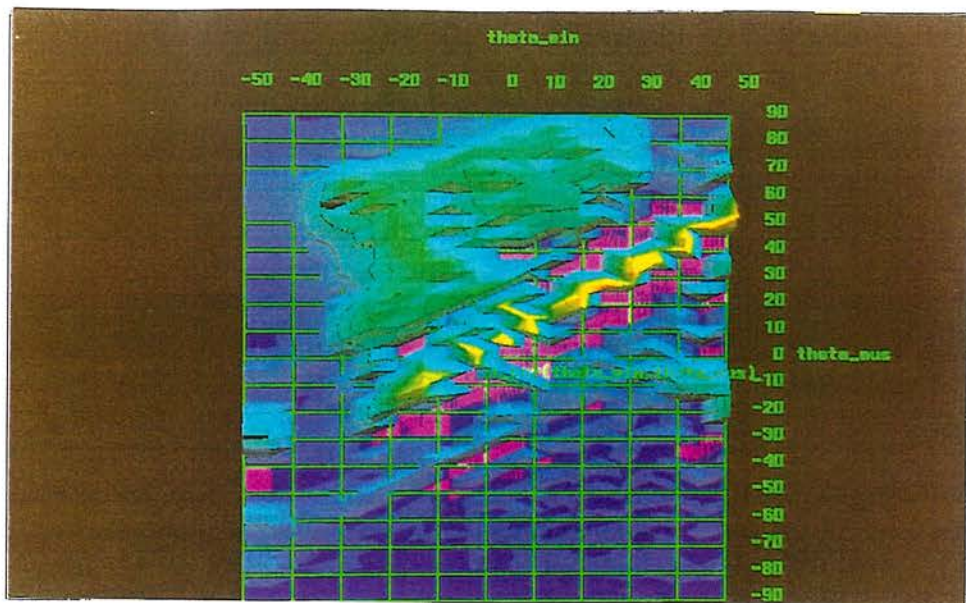


Abb. 6.24

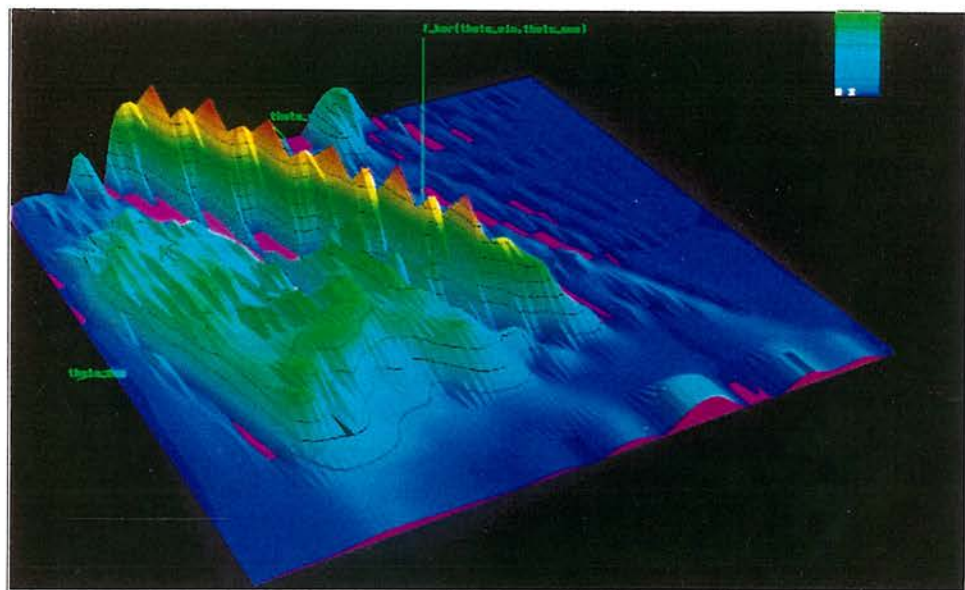


Abb. 6.25

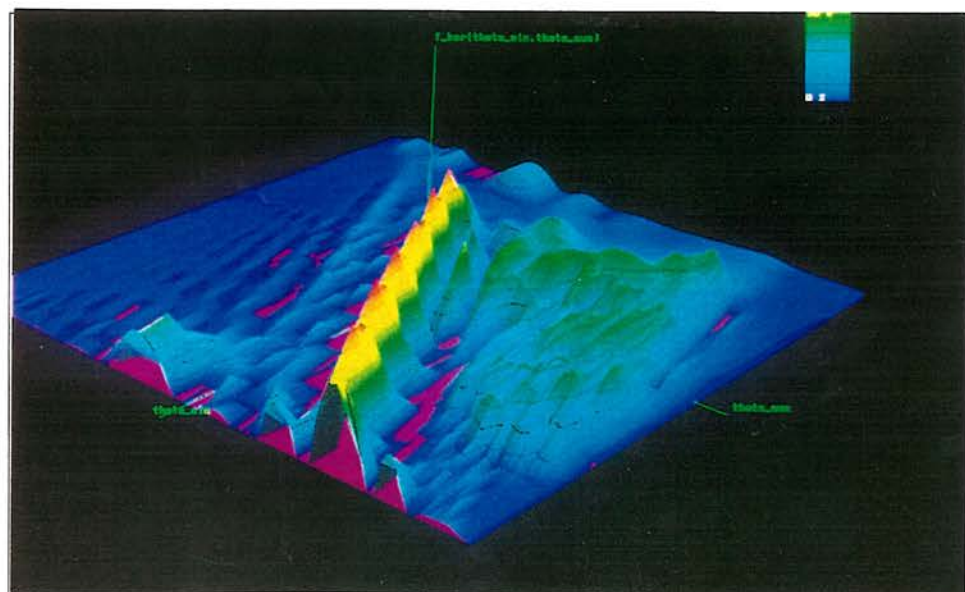


Abb. 6.26



### 6.3) Anwendung der Streudaten in dem Tageslichtsimulations-Programm Radiance

In diesem letzten Abschnitt soll nun ein Anwendungsbeispiel für die gewonnenen Streudaten vorgestellt werden.

Zur Simulation von Lichtverteilung in Räumen wurde am Lawrence Berkley Laboratory das Programm Radiance entwickelt. Ziel dieses Programms ist die Erzeugung von photo-realistischen Bildern von Gebäudeinnenräumen. Dazu muß im ersten Schritt die speziell gewünschte Raumgeometrie in einem programmeigenen Format eingegeben werden. Außerdem ist die Definition von Lichtquellen mit einem vorgegebenen Abstrahlverhalten nötig. Zur Berechnung eines Bildes wird dann in dieser vorgegebenen Geometrie Strahlverfolgung betrieben. Dies erfolgt derart, daß von einem gewählten Betrachterstandpunkt Strahlen in den Raum geschickt werden. Trifft ein Strahl auf eine nicht selbst strahlende Fläche, werden von dort erneut Strahlen zu den definierten Lichtquellen losgeschickt. Die Beleuchtungsstärke des jeweiligen Wandelementes richtet sich nach den Abstrahlwerten der Lichtquelle(n) in die Richtung(en) pro Raumwinkel, unter der diese das entsprechende Wandelement sieht. Die Eingabe des Abstrahlverhaltens erfolgt über ein Datenfile, auf das das Programm während der Laufzeit zugreift.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Simulation von Lichtlenkprofilen. Diese werden als selbst strahlende Flächen behandelt, wobei die Streudaten das Maß der Abstrahlung für einen gewählten Einfallswinkel angeben.

Die speziellen Schwierigkeiten bei der Behandlung von großflächig strahlenden Materialien mit allgemeiner Abstrahlcharakteristik sind in Anhang C beschrieben. Dort ist auch die Methode zur Simulation der sich durch spezielle Symmetrie auszeichnenden Lichtlenkprofile angegeben.

Um einen groben visuellen Eindruck von der Lichtlenkung der Kösterelemente zu gewinnen, wurde für die Simulation ein Innenraum mit einfacher Schachtelgeometrie gewählt, in dessen Fensterfront sich ein schmale Lichtquelle (ca. 1/50 der Fensterhöhe) mit dem charakteristischen Abstrahlverhalten befindet. Dies entspricht im Grunde einem Paar von zwei Profilen über die gesamte Fensterbreite, die auf halber Fensterhöhe angeordnet sind. Für eine gesamte mit Lichtlenkprofilen bestückte Fläche ergibt sich wieder die in Anhang C beschriebene Problematik des immensen Rechenaufwandes. Mögliche zukünftige Lösungsansätze sind dort angedeutet.

Für das Abstrahlverhalten wurden die entsprechenden Streudaten des Profils W\_55\_15 verwendet. (siehe vorheriger Abschnitt) Die Lichtverteilung ist für sechs verschiedene Sonnenhöhenwinkel berechnet worden. Der konstante Sonnen-Azimutwinkel wurde so gewählt, daß der "Lichtkegel" leicht schräg zu den Seitenwänden verläuft. Die Rechenzeit pro Bild beträgt auf einer Unix-Workstation der Reihe HP-700 ca. zwei Tage.

Abb. 6. 27 bis Abb. 6.32 zeigen die von Radiance berechneten, über Diabelichter ausgegebenen Rasterbilder:

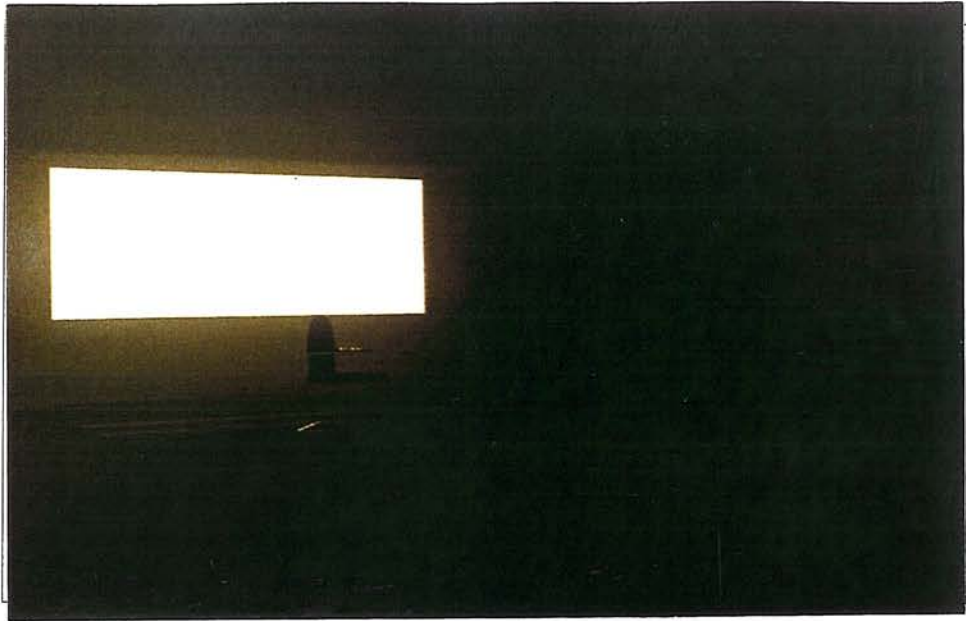
Bei hohem Sonnenstand dringt praktisch kein Licht in den Raum. Bei Verringerung des Sonnenhöhenwinkels dringt dann ziemlich schlagartig das Licht in den Raum ein, wobei der überwiegende Teil an die Decke gelenkt wird. Ab einem Höhenwinkel von ca. 25 grd. ist deutlich der dominierende, direkte Anteil zu erkennen.

Diese Simulationen sind als Ansatz zur Behandlung von lichtlenkenden Materialien zusehen. Sie beschreiben im Augenblick noch nicht die flächige Belegung mit lichtlenkendem Material. Außerdem wird nur der direkte Anteil des Sonnenlichtes berücksichtigt, was sich in den Bildern in der scharfkantigen Begrenzung des Lichtkegels zeigt.

Tageslicht-Simulation für Lichtlenkprofil W\_55\_15  
bei Veränderung des Sonnenhöhenwinkels

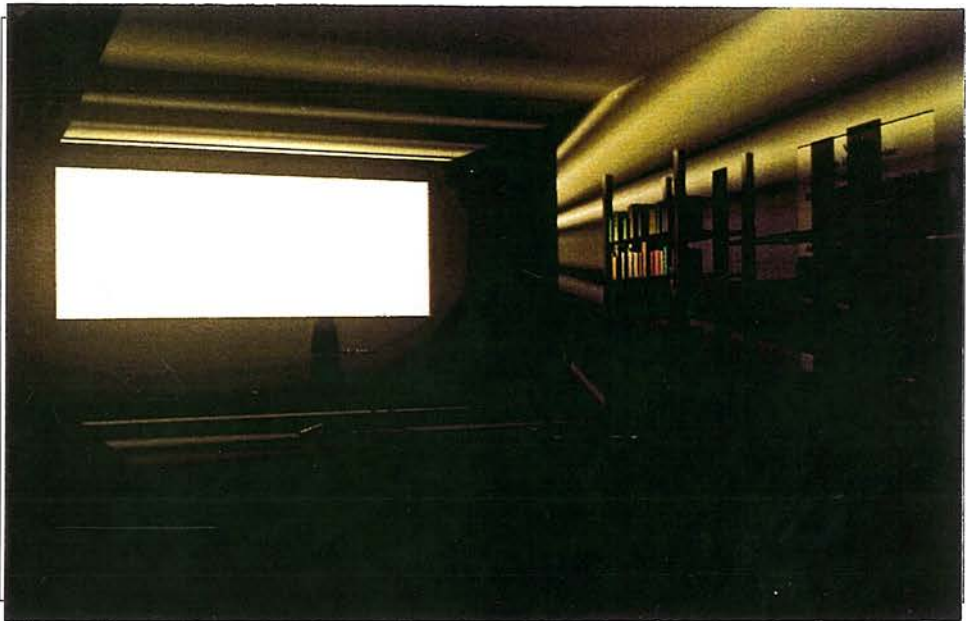
$$\theta_{\text{sonne}} = 32^\circ$$

Abb. 6.27



$$\theta_{\text{sonne}} = 25^\circ$$

Abb. 6.28



$$\theta_{\text{sonne}} = 20^\circ$$

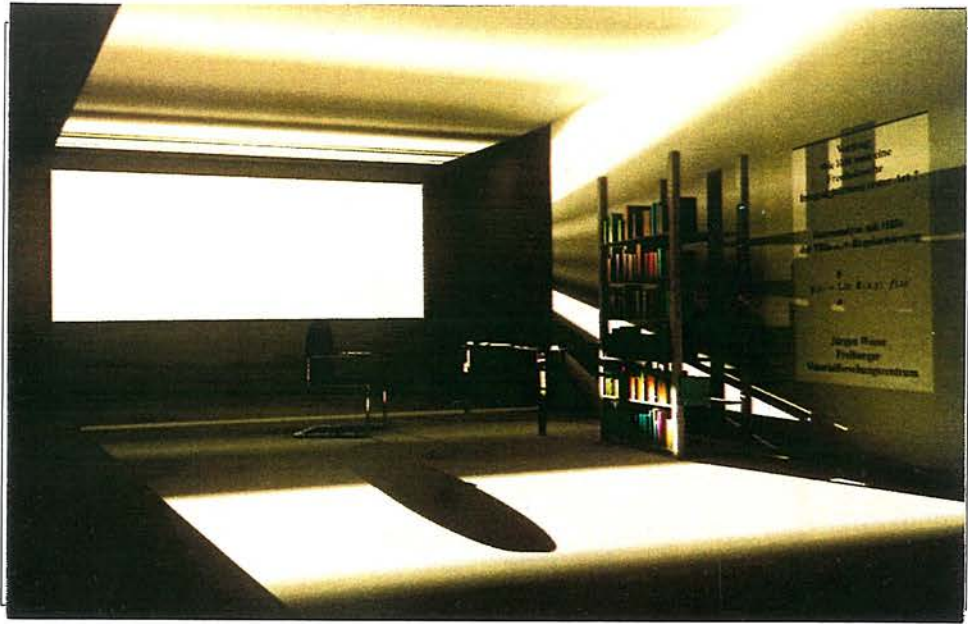
Abb. 6.29



Tageslicht-Simulation für Lichtlenkprofil W\_55\_15  
bei Veränderung des Sonnenhöhenwinkels

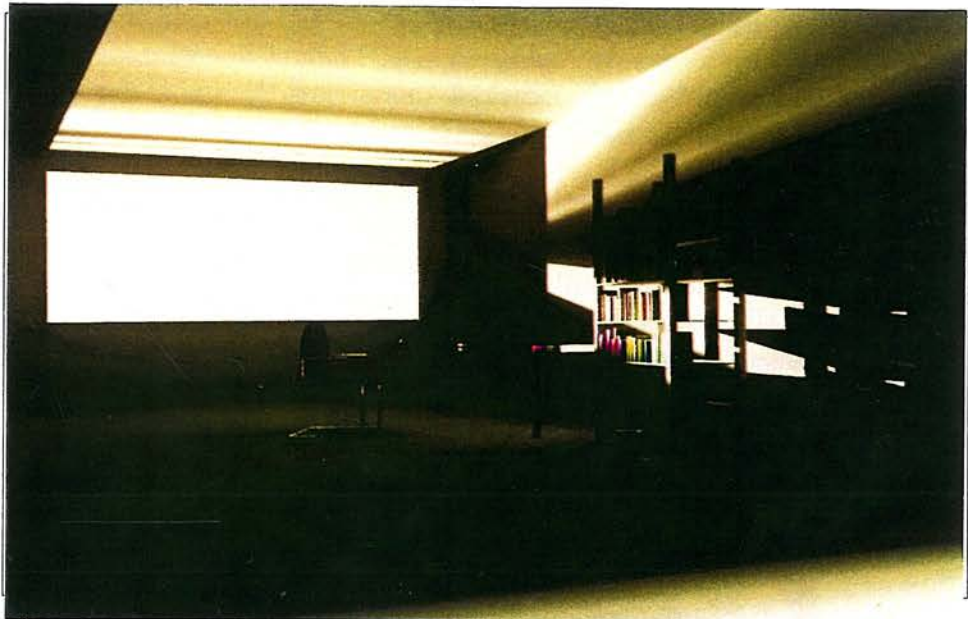
$$\theta_{\text{sonne}} = 15^\circ$$

Abb. 6.30



$$\theta_{\text{sonne}} = 10^\circ$$

Abb. 6.31



$$\theta_{\text{sonne}} = 5^\circ$$

Abb. 6.32



## 7.) Zusammenfassung

In Anlehnung an einen nordamerikanischen Prediger, der bezüglich seines Predigttaufbaus sinngemäß Folgendes bemerkte:

“Zuerst sage ich den Leuten, was ich ihnen sagen werde;  
dann sage ich, was ich zu sagen habe.  
Zum Schluß sage ich, was ich ihnen gesagt habe ... “

In dieser Arbeit wurde eine neue Klassifizierung optisch transparenter Materialien im Hinblick auf eine entwickelte Auswerte-Methode von experimentellen Streudaten eingeführt.

Für homogenes, optisch dünnes Material des 2-dim Falls (z.B. spiegelnde Lichtlenprofile mit ausgezeichneter Symmetrie) in einem Streuexperiment mit paralleler, inhomogener Beleuchtung wird der Zusammenhang zwischen experimentellen Streudaten und eigentlicher, charakteristischer Streufunktion über eine eindimensionale Fredholmsche Integralgleichung erster Art formuliert. Die Suche nach einem stabilen Auswerteformalismus dieser Gleichung führte über Ansätze zur analytischen Lösung, Matrix-Inversion und Pseudo-Inverse des zugeordneten diskreten Problems schließlich zur Regularisierungs-Methode. Simulationen mit computergenerierten, fehlerbehafteten Meßwerten zeigten, daß dieses Verfahren bei der konkreten Problem-Struktur zu einer stabilen “Lösung” der Gleichung führt.

Ein verbliebenes Problem besteht in dem systematischen Fehler der berechneten Lösung durch Einführung des Regularisierungsparameters. In dem Zusammenhang konnte eine neue Interpretation des Regularisierungsverfahrens gegeben werden, die dieses Verfahren in Beziehung setzt zur Pseudo-Inversen-Methode für ein effektives, neues Ausgangsproblem.

Schließlich wurden mit der Regularisierungs-Methode reale Streudaten eines spiegelnden Lichtlenkprofils umgerechnet. Der Vergleich der so korrigierten Meßwerte mit über Simulationen theoretisch vorhergesagten Daten zeigte die Richtigkeit des gewählten Modells zur Aufstellung der Integralgleichung und die Leistungsfähigkeit der Regularisierungs-Methode.

Die so ermittelte charakteristische Streufunktion diene als Input für ein Tageslicht-Simulations-Programm. Damit konnte erstmals unter Verwendung eines vereinfachten Fenstermodells die grundsätzliche Beleuchtungssituation in einem Raum bei Einsatz dieses speziellen Materials auf dem Computer simuliert werden.

Offen geblieben ist die Behandlung des 3-dim Falls für homogene, optisch dünne Materialien, die sich jedoch mit dem hier aufgestellten Formalismus bewerkstelligen lassen sollte. Ein weiteres Problem bildet die Klasse der optisch dicken Materialien. Zu erwarten ist für dieses Problem die Beschreibung über eine höherdimensionale Fredholmsche Integralgleichung. Ob die Struktur des hier verwendeten Auswerte-Verfahrens übertragen werden kann, müssen weitere Untersuchungen zeigen.

Das mit der Regularisierungs-Methode bereitgestellte Werkzeug zur Lösung des bestimmten Integralgleichungstyps bietet den Ausgangspunkt für neue Meßaufbauten. Eine sehr reizvolle Idee besteht in einer diffus-direkt Messung. Möglicherweise kann aus den gewonnenen Streudaten die komplette Information für das charakteristische, winkelabhängige Streuverhalten zurückgerechnet werden. Die Entscheidung darüber bedarf aber einer weiteren Analyse der mathematischen Struktur der beschreibenden Gleichung.

## 8.) Anhang

### A) Konsistenzbetrachtung für das Raumwinkel-Integral

In der Literatur findet man häufig folgende Beschreibung der Leistung, die ein Flächenelement (Linielement) mit vorgegebenem Abstrahlverhalten auf ein anderes abstrahlt:

im Dreidimensionalen

$$\frac{dP_{dF \rightarrow dA}}{dF} = \frac{dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{(r_{dF \leftrightarrow dA})^2} \cdot \tilde{f}_{3d}(\theta, \varphi) \quad (\text{Gl. A.1})$$

im Zweidimensionalen

$$\frac{dP_{ds \rightarrow dA}}{ds} = \frac{dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{r_{ds \leftrightarrow dA}} \cdot \tilde{f}_{2d}(\theta) \quad (\text{Gl. A.2})$$

Diese Formulierung ist konsistent mit der in Kapitel 2 angegebenen. Die eine Formulierung geht in die andere durch das entsprechende Transformationsverhalten der Koordinatendifferentiale über. Man beachte jedoch, daß das in Gl. A.1 bzw. Gl. A.2 auftretende  $\tilde{f}(\ )$  eine andere Bedeutung hat, als das in Kapitel 2 eingeführte. Den Zusammenhang sieht man folgendermaßen:

Analog zu Kapitel 2 gilt:

$$\frac{dP_{dF \rightarrow dA}}{dF} = d\Omega_{3d} \cdot f_{3d}(\ ) \quad (\text{Gl. A.3})$$

bzw.

$$\frac{dP_{ds \rightarrow dA}}{ds} = d\Omega_{2d} \cdot f_{2d}(\ ) \quad (\text{Gl. A.4})$$

Die Beziehung zwischen Raumwinkelement  $d\Omega$  und Flächen(Linien)element  $dA$  erhält man über die entsprechende Projektionsfläche(linie)  $pr(dA)$ :

Es gilt:

$$pr(dA) = (r_{dF \leftrightarrow dA})^2 \cdot d\Omega_{3d} = \cos\alpha \cdot dA \quad (\text{Gl. A.5})$$

(siehe Abb. A.1)

bzw.

$$pr(dA) = r_{ds \leftrightarrow dA} \cdot d\Omega_{2d} = \cos\alpha \cdot dA \quad (\text{Gl. A.6})$$

(siehe Abb. A.2)

Damit transformieren sich die Koordinatendifferentiale:

$$d\Omega_{3d} = \frac{dA \cdot \cos\alpha}{(r_{dF \leftrightarrow dA})^2} \quad (\text{Gl. A.7})$$

bzw.

$$d\Omega_{2d} = \frac{dA \cdot \cos\alpha}{r_{ds \leftrightarrow dA}} \quad (\text{Gl. A.8})$$

und man erhält:

$$\frac{dP_{dF \rightarrow dA}}{dF} = d\Omega_{3d} \cdot f_{3d}(\ ) = \frac{dA \cdot \cos\alpha}{(r_{dF \leftrightarrow dA})^2} \cdot f_{3d}(\ ) \quad (\text{Gl. A.9})$$

bzw.

$$\frac{dP_{ds \rightarrow dA}}{ds} = d\Omega_{2d} \cdot f_{2d}(\ ) = \frac{dA \cdot \cos\alpha}{r_{dF \leftrightarrow dA}} \cdot f_{2d}(\ ) \quad (\text{Gl. A.10})$$

Aus dem Vergleich mit Gl. A.1 bzw. A.2 ergibt sich:

$$f_{2d \sim 3d}(\ ) = \cos\beta \cdot \tilde{f}_{2d \sim 3d}(\ ) \quad (\text{Gl. A.11})$$

Das heißt, die Funktion in Gl. A.1 bzw. A.2 beschreibt nicht die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel und Fläche, sondern die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel und effektiver, projizierter Fläche. (Flächenanteil von  $dF$  bzw.  $ds$ , der senkrecht zur Abstrahlrichtung steht)

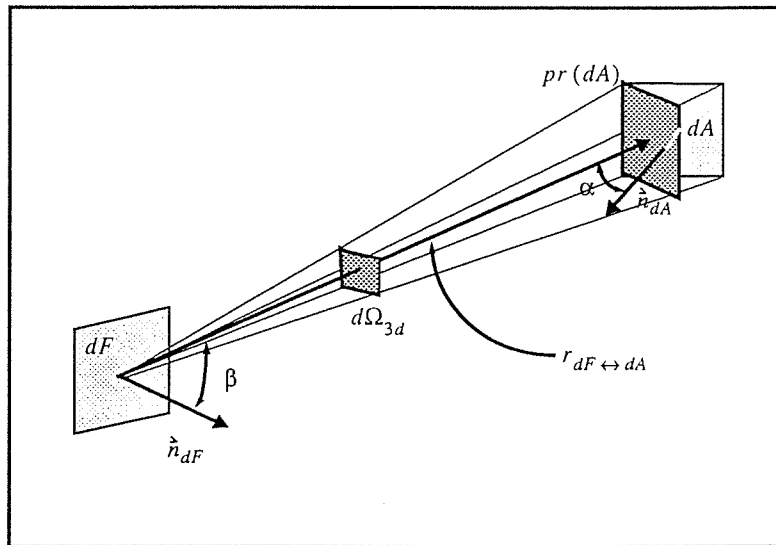


Abb. A.1  
Sichtwinkel  $dF \rightarrow dA$  3-dim

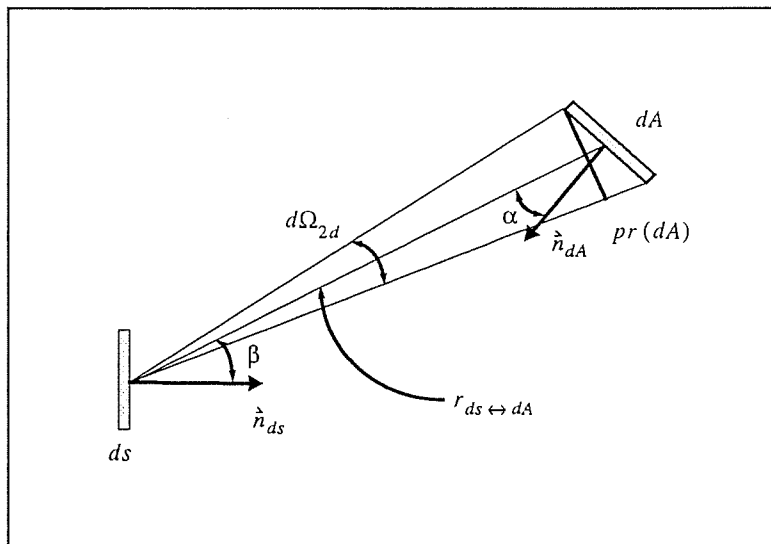


Abb. A.2  
Sichtwinkel  $ds \rightarrow dA$  2-dim

## B) Eine andere Interpretation der Regularisierungs-Methode

Die grundlegenden Formeln:

die Ausgangsgleichung

$$\vec{P} = \tilde{G} \cdot \vec{f} \quad (\text{Gl. B.1})$$

die SVD-Entwicklung der Ausgangsmatrix

$$\tilde{G} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{Gl. B.2})$$

die zugehörige Pseudo-Inverse

$$\tilde{G}^\dagger = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T = (\tilde{G}^T \tilde{G})^{-1} \tilde{G}^T \quad (\text{Gl. B.3})$$

mit den Bedingungen für  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = 1 \text{ und } \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = 1 \quad (\text{Gl. B.4})$$

die Lösung mit der Pseudo-Inversen

$$\vec{f} = \tilde{G}^\dagger \cdot \vec{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \vec{P} \quad (\text{Gl. B.5})$$

die Lösung über Regularisierungs-Methode

$$\hat{f} = (\tilde{G}^T \cdot \tilde{G} + \gamma \cdot 1)^{-1} \cdot \tilde{G}^T \vec{P} = \mathbf{V} (\mathbf{W} + \gamma \cdot \mathbf{W}^{-1})^{-1} \mathbf{U}^T \vec{P} \quad (\text{Gl. B.6})$$

Für die Pseudo-Inverse gelten folgende Rechenregeln:

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A})^\dagger = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \quad (\text{Gl. B.7})$$

mit

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = 1$$

denn

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{A})^\dagger &= ((\mathbf{U} \cdot \mathbf{A})^T \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}))^{-1} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{A})^T \\ &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (\text{Gl. B.8})$$

Wählt man  $\mathbf{A} = \mathbf{WV}^T + \gamma \cdot \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^T$ , folgt aus Gl. B.6 :

$$\hat{f} = (\mathbf{WV}^T + \gamma \cdot \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \vec{P} \quad (\text{Gl. B.9})$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{U} \cdot (\mathbf{W}\mathbf{V}^T + \gamma \cdot \mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^T))^{\dagger} \cdot \vec{P} \\
&= (\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T + \gamma \cdot \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^T)^{\dagger} \cdot \vec{P} \\
&= (\tilde{\mathbf{G}} + \gamma \cdot (\mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}^T)^T)^{\dagger} \cdot \vec{P} \\
&= (\tilde{\mathbf{G}} + \gamma \cdot (\tilde{\mathbf{G}}^{\dagger})^T)^{\dagger} \cdot \vec{P} \tag{Gl. B.10}
\end{aligned}$$

also:

$$\vec{f} = \tilde{\mathbf{G}}_{eff}^{\dagger} \cdot \vec{P} \tag{Gl. B.11}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{eff} = \tilde{\mathbf{G}} + \gamma \cdot (\tilde{\mathbf{G}}^{\dagger})^T \tag{Gl. B.12}$$

Dies ist ein recht bemerkenswertes Resultat:

Die Regularisierungs-Lösung, d.h. die Lösung, die sich für die Minimierung des Funktionals mit Zwangsbedingungen ergibt, entspricht der Lösung eines Problems mit effektiver, neuer Ausgangsmatrix ohne Zwangsbedingungen über die Pseudo-Inverse.

D.h. die Minimierung des Funktionals mit Zwangsbedingung

$$\tilde{V}_1(\vec{f}) = \|\vec{P} - (\tilde{\mathbf{G}} \cdot \vec{f})\|^2 + \gamma \cdot H(\vec{f}) \tag{Gl. B.13}$$

liefert die gleiche Lösung wie für das folgende Funktional ohne Zwangsbedingung mit neuer effektiver Ausgangsmatrix

$$\tilde{V}_2(\vec{f}) = \|\vec{P} - (\tilde{\mathbf{G}}_{eff} \cdot \vec{f})\|^2 \tag{Gl. B.10}$$

Dies ist auf jeden Fall erfüllt für  $H(\vec{f}) = \|\vec{f}\|^2$ , aber möglicherweise noch verallgemeinerbar.

Wählt man speziell für  $\tilde{\mathbf{G}}$  eine quadratische, nicht singuläre Matrix, erhält man:

$$\vec{f} = (\tilde{\mathbf{G}} + \gamma \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1})^{-1} \cdot \vec{P} \tag{Gl. B.11}$$

Die Regularisierungs-Methode entspricht der Invertierung von  $\tilde{\mathbf{G}}$  unter Beimischung von der "reinen Inversen" von  $\tilde{\mathbf{G}}$  selbst. Das Maß für den beigemischten Anteil von  $\tilde{\mathbf{G}}$  ist gerade der Regularisierungsparameter!



Man sieht, daß  $\tilde{\mathbf{G}}_{eff}$  für  $\gamma = 0$  identisch ist mit  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Das heißt:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{eff}^{-1} = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \quad (\text{Gl. B.12})$$

Für sehr große  $\gamma$ -Werte überwiegt der Anteil  $\gamma \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1}$  und man erhält:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{eff}^{-1} \sim \frac{1}{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{G}} \quad (\text{Gl. B.13})$$

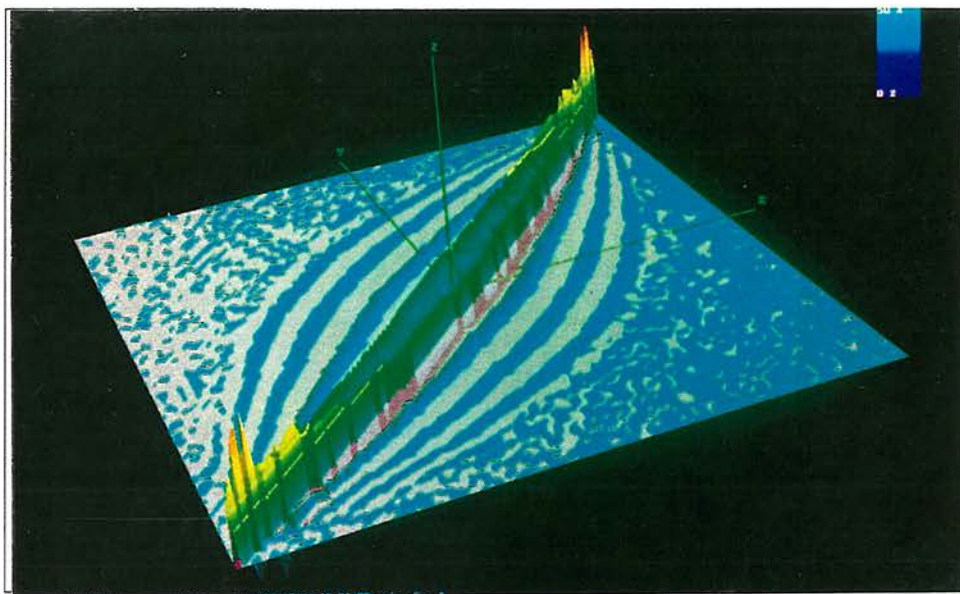
Abb. B.1 bis Abb. B.8 zeigen  $\tilde{\mathbf{G}}_{eff}^{-1}$  für verschiedene  $\gamma$ -Werte. Möglicherweise bietet die Struktur der beschreibenden Matrix ein Auswahlkriterium für den Regularisierungsparameter.

Ob Gl. B.11 "nur" eine reine Folge der zugehörigen algebraischen Struktur ist oder ob sich hier ein quasi "Homöopathie" Effekt zeigt, der für Beschreibung von Naturvorgängen relevant sein könnte, muß an dieser Stelle offen bleiben. (Man beachte die Freiheit in der Wahl der Abbildung  $\tilde{\mathbf{G}}$ )

### $\tilde{\mathbf{G}}_{eff}^{-1}$ für verschiedene $\gamma$ -Werte

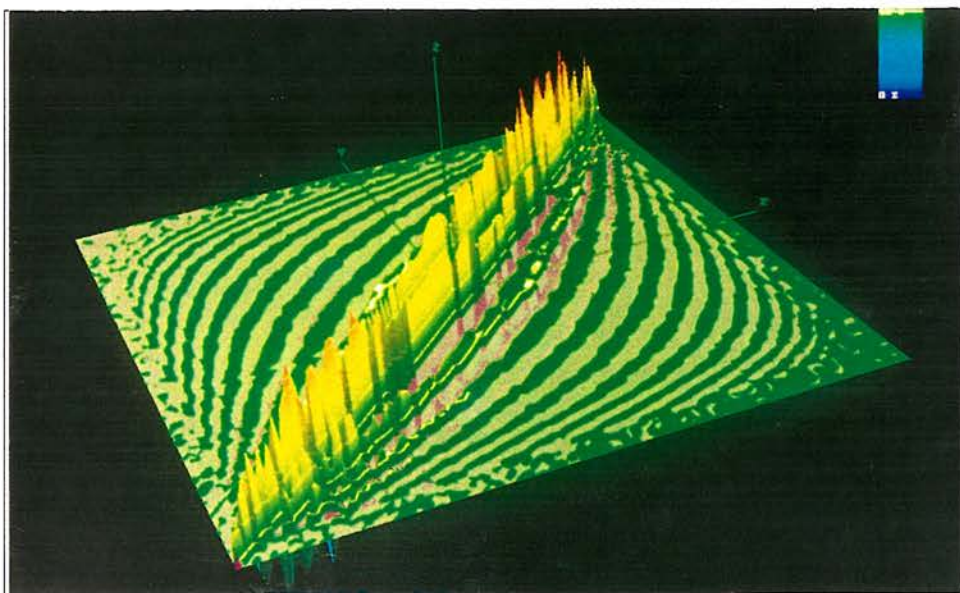
$\gamma = 0.01$

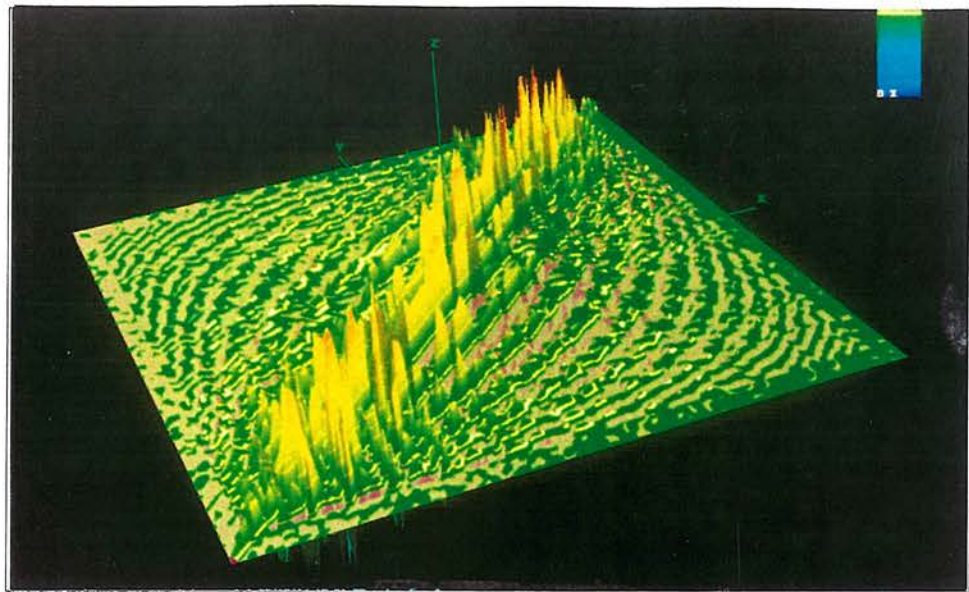
Abb. B.1



$\gamma = 0.001$

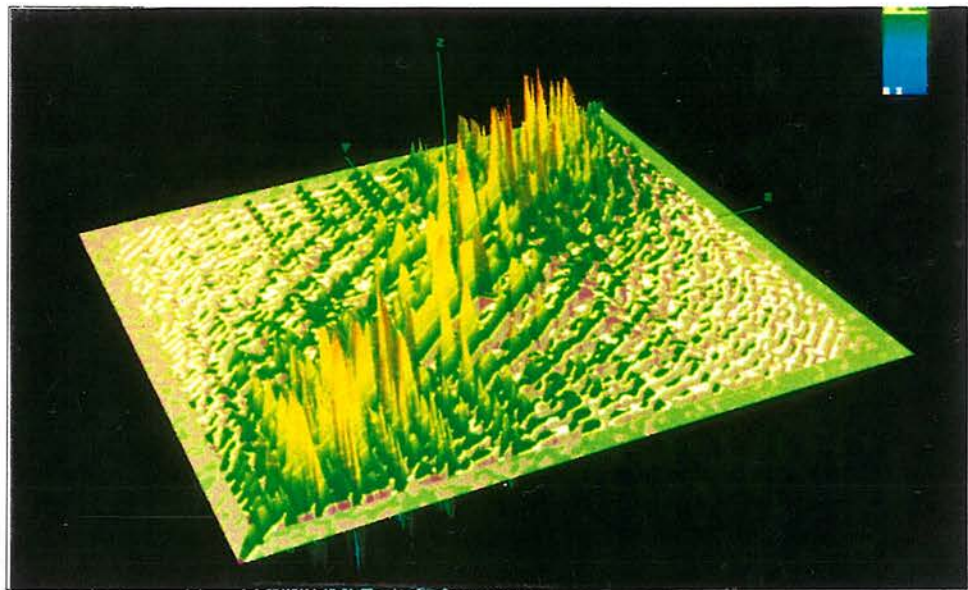
Abb. B.2





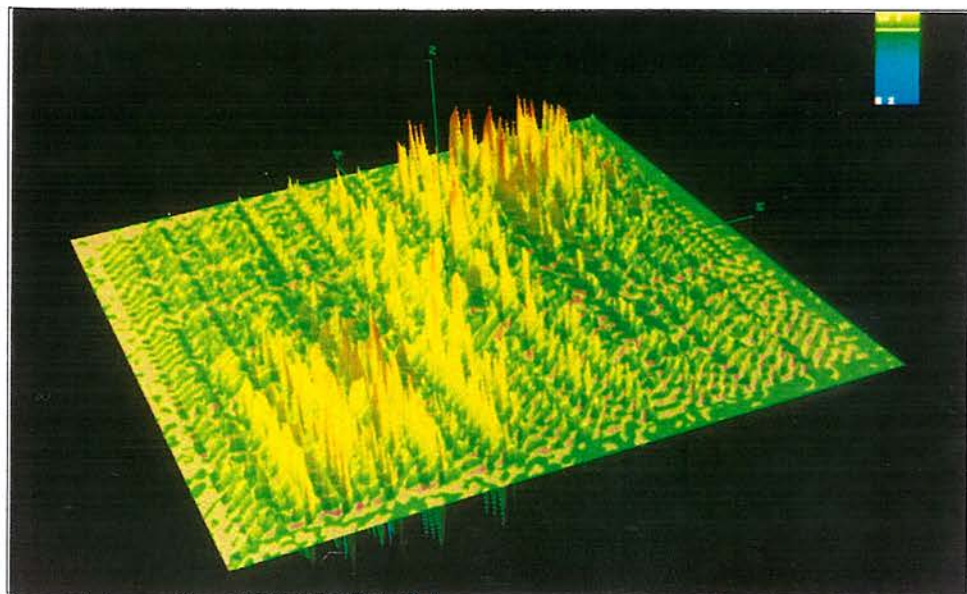
$\gamma = 0.0002$

Abb. B.3



$\gamma = 0.00015$

Abb. B.4

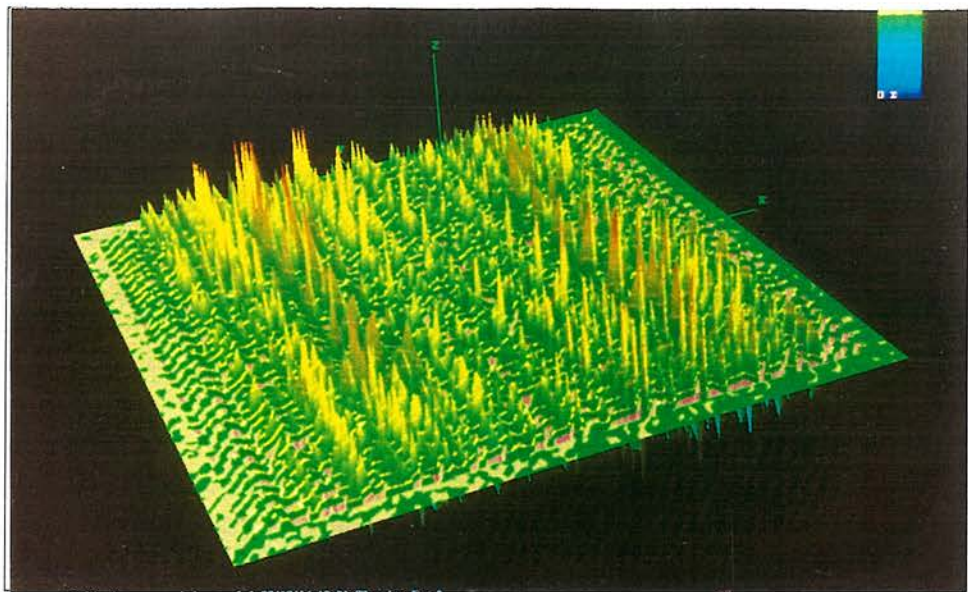


$\gamma = 0.0001$

Abb. B.5

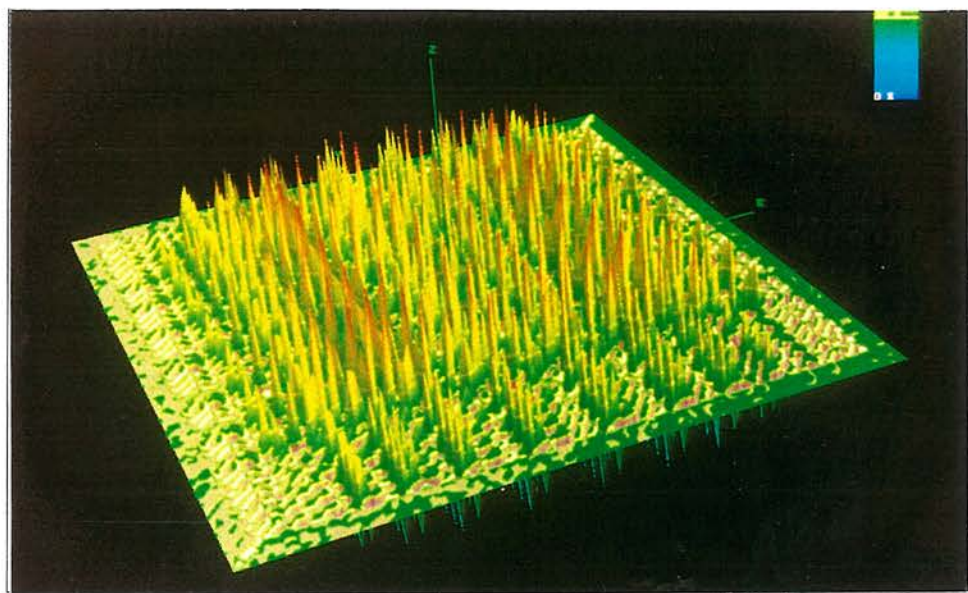
$\gamma = 0.00005$

Abb. B.6



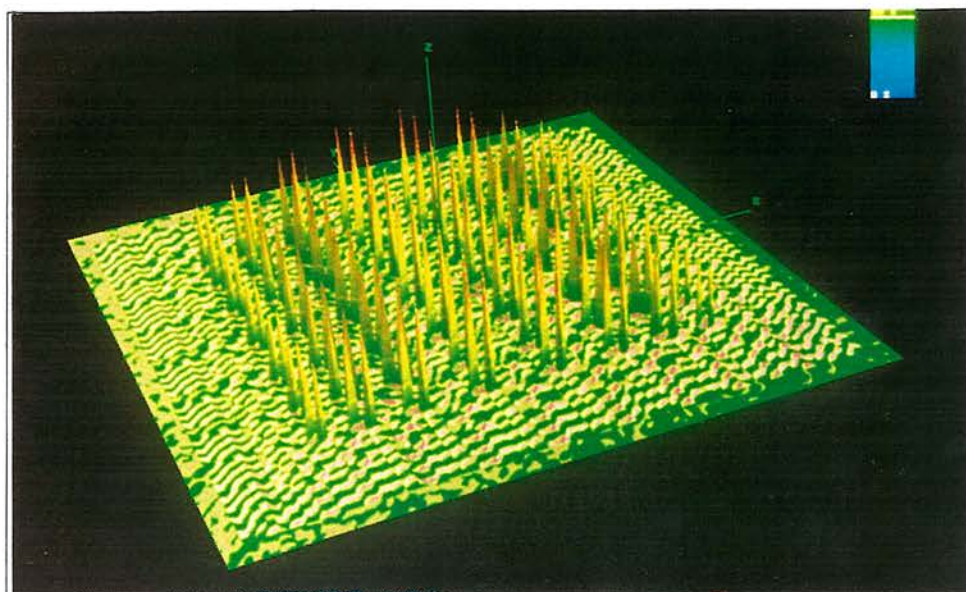
$\gamma = 0.00001$

Abb. B.7



$\gamma = 0.000001$

Abb. B.8



## C) Behandlung von Spiegellamellen mit 1-dim translationsinvarianter Symmetrie

Bei den in Kapitel 6 behandelten Lichtlenkprofilen liegt eine ausgezeichnete Symmetrie vor: Verschiebt man die Lamellen in eine ausgezeichnete Richtung, gehen diese wieder in sich selbst über. Diese Richtung sei im folgenden mit Lamellen-Richtung  $\vec{l}$  bezeichnet. Für eine derartige Symmetrie vereinfacht sich die optische Beschreibung.

Bezeichnungen:

Die Profilquerschnittsfläche beschrieben durch

Normale des Gesamtelements:  $\vec{n}$   
und Richtung senkrecht zu den Lamellen:  $\vec{A}$

Richtung der Lamellen:  $\vec{l} = (\vec{A} \times \vec{n}) \cdot l$   
Element Länge: 1

Einfallender Strahl:  $\vec{d}$   
Gestreuter Strahl:  $\vec{d}'$

Aufteilung von  $\vec{d}$ :  $\vec{d}_{norm} = ((\vec{A} \times \vec{n}) \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{A} \times \vec{n})$  (Gl. C.1)

$$\vec{d}_{par} = \vec{d} - \vec{d}_{norm} \quad (\text{Gl. C.2})$$

Analoge Aufteilung folgt für  $\vec{d}'$ .

mit  $|\vec{A}| = |\vec{d}| = |\vec{d}'| = |\vec{n}| = 1$  (Gl. C.3)

### C.1) Strahlverfolgung

Die 3-dim Strahlverfolgung in solchen Elementen kann auf die 2-dim Reflexionen in der Profilquerschnittsfläche (aufgespannt von  $\vec{A}$  und  $\vec{n}$ ) zurückgeführt werden. Dazu wird ein beliebig einfallender Strahl aufgeteilt in einen Anteil  $\vec{d}_{par}$  in dieser Ebene und einen Anteil  $\vec{d}_{norm}$  senkrecht zu dieser Ebene. Der Anteil  $\vec{d}_{par}$  wird entsprechend der Form des Profilquerschnitts reflektiert, der Anteil  $\vec{d}_{norm}$  bleibt unverändert, so daß sich für den gestreuten Strahl ergibt:

$$\vec{d}' = \vec{d}'_{par} + \vec{d}'_{norm} = \vec{d}_{par} + \vec{d}_{norm} \quad (\text{Gl. C.4})$$

d.h.  $\vec{d}'_{norm} = \vec{d}_{norm}$  (Gl. C.5)

Der Beweis dazu erfolgt in zwei Schritten:

i.) Zeige, daß obige Behauptung richtig ist bei einer Reflexion an einer beliebigen Testebene. Die Profilquerschnittsebene entspricht dann einer Ebene senkrecht zu dieser Ebene.

ii.) Sei eine Parametrisierung der Profilfläche gegeben durch:

$$\vec{F}_{profil}(\alpha, \beta) = \vec{n} \cdot h_1(\alpha) + \vec{A} \cdot h_2(\alpha) + (\vec{A} \times \vec{n}) \cdot \beta \quad (\text{Gl. C.6})$$

Zeige, daß bei einem Strahl mit Richtung  $\vec{d}$ , die Projektion des Schnittpunktes (mit der Profilfläche) auf die Profilquerschnittsfläche unabhängig von dem  $\vec{d}_{norm}$  Anteil ist.

Aus i.) und ii.) zusammen folgt obige Behauptung für alle Profile mit entsprechender Symmetrie. Denn aus i.) ergibt sich die Gültigkeit der obigen Behauptung bei einer Reflexion. Gilt zusätzlich noch ii.), kann jede weitere Reflexion auch von schräg laufenden Strahlen analog behandelt werden.

Zu i.)

Das Reflexionsgesetz in vektorieller Form:

$$\vec{d}' = \vec{d} - 2\vec{n}_e(\vec{d} \cdot \vec{n}_e) \quad (\text{Gl. C.7})$$

$\vec{n}_e$  sei die Normale zur Reflexionsebene;  $\vec{l}$  eine beliebige Richtung in dieser Ebene.

Sei  $\vec{d}$  in der orthonormalen Basis  $\vec{l}, \vec{n}_e, (\vec{l} \times \vec{n}_e)$  folgendermaßen dargestellt:

$$\vec{d} = \vec{n} \cdot d_1 + \vec{l} \cdot d_2 + (\vec{l} \times \vec{n}) \cdot d_3 \quad (\text{Gl. C.8})$$

Das Reflexionsgesetz liefert:

$$\vec{d}' = \vec{d} - 2d_1\vec{n}_e \quad (\text{Gl. C.9})$$

Nach obiger Behauptung soll sich aber  $\vec{d}'$  folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{d}' &= \vec{l} \cdot d_2 + (\vec{n}_e \cdot d_1 + (\vec{l} \times \vec{n}_e) \cdot d_3) - 2\vec{n}_e((\vec{n}_e \cdot d_1 + (\vec{l} \times \vec{n}_e) \cdot d_3) \cdot \vec{n}_e) \\ &= \vec{l} \cdot d_2 + \vec{n}_e \cdot d_1 + (\vec{l} \times \vec{n}_e) \cdot d_3 - 2d_1\vec{n}_e \\ &= \vec{d} - 2d_1\vec{n}_e \end{aligned} \quad (\text{Gl. C.10})$$

Dies entspricht dem Ergebnis von Gl. C.9.

Zu ii.)

Sei der Strahl parametrisiert über:

$$\vec{S}(\varepsilon) = \vec{d}_0 + \varepsilon \cdot \vec{d} \quad (\text{Gl. C.11})$$

Mit der folgenden Darstellung von  $\vec{d}$  und  $\vec{d}_0$

$$\vec{d} = \vec{n}_e \cdot d_1 + \vec{A} \cdot d_2 + (\vec{A} \times \vec{n}_e) \cdot d_3 \quad (\text{Gl. C.12})$$

$$\vec{d}_0 = \vec{n}_e \cdot d_{01} + \vec{A} \cdot d_{02} + (\vec{A} \times \vec{n}_e) \cdot d_{03} \quad (\text{Gl. C.13})$$

macht man folgenden Ansatz für den Schnittpunkt  $\vec{x}_s$  mit dem Profil:

$$\underline{d}_{01} + \varepsilon_s \cdot \underline{d}_1 = h_1(\alpha) \quad (\text{Gl. C.14})$$

$$\underline{d}_{02} + \varepsilon_s \cdot \underline{d}_2 = h_2(\alpha) \quad (\text{Gl. C.15})$$

$$\underline{d}_{03} + \varepsilon_s \cdot \underline{d}_3 = \beta \quad (\text{Gl. C.16})$$

Aus Gl. C.12 und C.13 folgt:

$$\frac{\underline{d}_1}{\underline{d}_2} = \frac{h_1(\alpha) - \underline{d}_{01}}{h_2(\alpha) - \underline{d}_{02}} \quad (\text{Gl. C.17})$$

was die Lösung  $\alpha = \alpha_0$  habe, die unabhängig von  $\beta$  ist. Damit folgt für  $\varepsilon_s$ :

$$\varepsilon_s = \frac{h_1(\alpha_0) - \underline{d}_{01}}{\underline{d}_1} \quad (\text{Gl. C.18})$$

Man erhält für den Schnittpunkt:

$$\vec{x}_s = \vec{d}_0 + \varepsilon_s \cdot \vec{d} \quad (\text{Gl. C.19})$$

Für die Projektion des Schnittpunktes in die Profilquerschnittsfläche ergibt sich damit:

$$Pr\vec{x}_s = \vec{n}_e \cdot \left( \underline{d}_{01} + \frac{h_1(\alpha_0) - \underline{d}_{01}}{\underline{d}_1} \cdot \underline{d}_1 \right) + \vec{A} \cdot \left( \underline{d}_{02} + \frac{h_1(\alpha_0) - \underline{d}_{01}}{\underline{d}_1} \cdot \underline{d}_2 \right)$$

( Gl. C.20 )

Dieser Ausdruck ist unabhängig von dem Anteil  $\vec{d}_{Enorm}$  senkrecht zur Profilebene:

$$\vec{d}_{Enorm} = (\vec{A} \times \vec{n}_e) \cdot (\underline{d}_{03} + \varepsilon \cdot \underline{d}_3) \quad (\text{Gl. C.20})$$

Das bedeutet, daß die Schnittpunktsprojektion in die Profilquerschnittsfläche unabhängig davon ist, wie schräg ein Strahl zu dieser Ebene verläuft (beschrieben durch  $\underline{d}_{03}$  und  $\underline{d}_3$ ).

Damit ist obige Behauptung gezeigt

## C.2) Spezielle Behandlung in Tageslicht-Simulations-Programmen

Bei der Simulation von Fenstermaterialien mit allgemeiner Abstrahlcharakteristik in Tageslicht-Programmen wie Radiance entsteht eine gewisse Schwierigkeit: Ein Wandele-

ment sieht eine ausgedehnte Lichtquelle unter einem ausgedehnten Raumwinkelbereich. (Analog zum Detektor, der die ausgedehnte Probe sieht) Für eine physikalisch richtige Bestimmung des entsprechenden Lichtanteils, den das Wandelement von der Lichtquelle empfängt, müßte diese je nach Ausdehnung unterteilt und als Multi-Quelle behandelt werden. Dies führt jedoch zu erheblichen Schwierigkeiten, da die Rechenzeit annähernd proportional zur Anzahl der Lichtquellen ist.

Eine mögliche Lösung besteht in der Vorausberechnung dieser Integral-Anteile und Abspeicherung der entsprechenden Werte in einem Datenfile, auf das das Simulationsprogramm dann zur Laufzeit zugreift. Dieses Vorgehen entspricht dem Übergang von einer Abstrahlfunktion (entspricht Streufunktion; siehe Kapitel 6.3) für ein kleines Flächenelement:<sup>1</sup>

$$f_{\Delta F} = f(\vec{d}, \vec{d}') \quad (\text{Gl. C.21})$$

zu einer effektiven Abstrahlfunktion der ganzen Fläche in Abhängigkeit vom Abstand:

$$f_F = f_{eff}(\vec{d}, \vec{d}', r) \quad (\text{Gl. C.22})$$

Für die Lichtlenkprofile mit translationsinvarianter Symmetrie bietet sich jedoch eine andere Möglichkeit an:

Zunächst erhält man das allgemeine 3-dim Streuverhalten aus den 2-dim Daten über:

$$f_{3-dim}(\vec{d}, \vec{d}') = f_{2-dim}(Pr\theta_{ein}(\vec{d}), Pr\theta_{aus}(\vec{d}')) \cdot \delta(|\vec{d}_{norm} - \vec{d}'_{norm}|) \quad (\text{Gl. C.23})$$

$Pr\theta_{ein}$  ( $Pr\theta_{aus}$ ) sind die Winkel der in die Profilquerschnittsfläche projizierten Strahlen:

$$\cos(Pr\theta_{ein}) = \frac{\vec{d}_{par} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}_{par}|} \quad (\text{Gl. C.24})$$

und

$$\cos(Pr\theta_{aus}) = \frac{\vec{d}'_{par} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}'_{par}|} \quad (\text{Gl. C.25})$$

(siehe Gl. C.2)

Man beachte: Je nach Tageszeit, Datum und Gebäudeausrichtung ergibt sich eine entsprechende Richtung von  $\vec{d}$  in Abhängigkeit vom Azimut- und Höhenwinkel der Sonne.

---

1. Die Streufunktion wird hier in Abhängigkeit von den Vektoren, die die Strahlrichtung beschreiben, angegeben. Dies ist natürlich äquivalent zu der Beschreibung in Abhängigkeit von den entsprechenden Winkeln der Kugelkoordinaten aus Kapitel 3.

Die Situation bei der Strahlverfolgung in Radiance ist nun folgende:

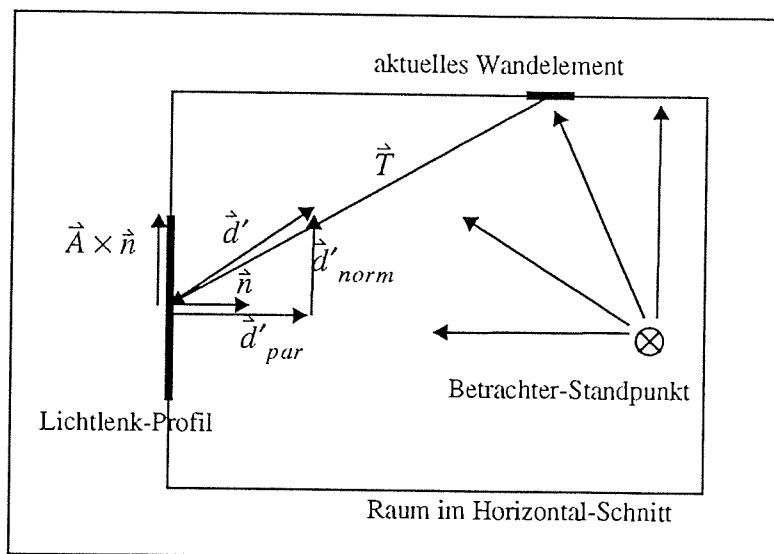


Abb. C.1

Ein bestimmte Einfallsrichtung des direkten Lichts ist durch  $\vec{d}$  vorgegeben. Damit ist der  $\vec{d}'_{norm}$  bekannt. Vom gewählten Betrachter-Standpunkt aus werden Strahlen im Raum verfolgt. Von einem "getroffenen" Wandelement wird wiederum ein Strahl auf die Mitte der nicht weiter unterteilten, das Lichtlenkprofil darstellenden Lichtquelle geschickt. Bekannt ist dabei die Richtung  $\vec{T}$  von dem Wandelement zur Mitte der Lichtquelle. Damit kann sofort der Projektionswinkel auf die Querschnittsfläche  $Pr\theta_{aus}$  bestimmt werden. (siehe Abb. C.1) Das verbleibende Problem bei der Bestimmung des korrekten Lichtanteils ist der  $\delta$ -Funktionsanteil in Gl. C.23.

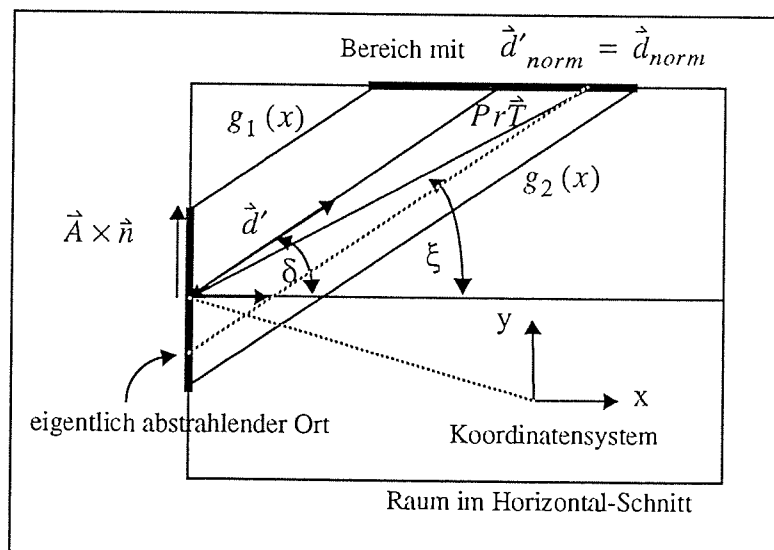


Abb. C.2

Die Idee zur Berücksichtigung dieses Terms besteht darin, für einen Strahl mit Richtung  $\vec{T}$  zu prüfen, ob die Länge seiner Projektion  $|Pr\vec{T}|$  in die von  $\vec{n}$  und  $\vec{A} \times \vec{n}$  aufgespannte Ebene kleiner als eine vom Winkel  $\xi$  abhängige Grenzlänge  $L_c(\delta, \xi)$  ist. (siehe Abb. C.2)



Wenn ja, dann ist der zugehörige Abstrahlwert der Lichtquelle:

$$f_{2-dim}(Pr\theta_{ein}(\vec{d}), Pr\theta_{aus}(\vec{d}'))$$

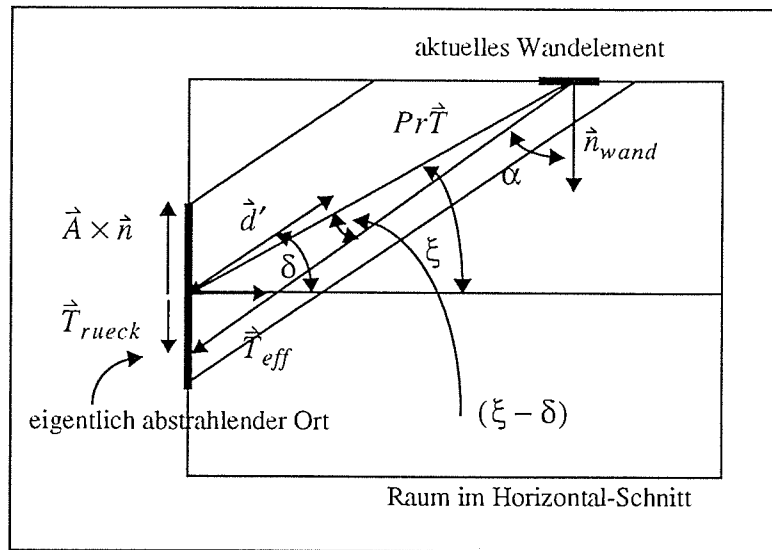


Abb. C.3

Effektiv stammt dieser Lichtanteil zwar nicht von der Mitte der Quelle. Da aber die Projektionen der von der Quelle emittierten Strahlen in dieser Ebene parallel verlaufen, ist der gewählte Anteil identisch mit dem eigentlichen Anteil, der von einem weiter außen liegenden Teil der Lichtquelle mit einer effektiven Richtung  $\vec{T}_{eff}$  herrührt. Zur Berechnung der korrekten Beleuchtungsstärke ist dieser Wert noch mit der Größe des Raumwinkels, unter dem der eigentliche Abstrahlort das jeweilige Wandelement sieht, zu wichten. Dieser hängt von dem Cosinus des Winkels  $\alpha$  zwischen der Wandnormalen  $\vec{n}_{wand}$  und der effektiven Strahlrichtung  $\vec{T}_{eff}$  und dem Betrag  $|\vec{T}_{eff}|$  ab. (siehe Anhang A)

Ist  $|\vec{PrT}|$  größer als die kritische Grenzlänge  $L_c(\delta, \xi)$ , liegt das Wandelement außerhalb des "Lichtkegels" und bleibt dunkel.

Die Grenzlänge erhält man folgendermaßen:

Der "Lichtkegel" ist in seiner Projektion in die x-y-Ebene (entspricht der von  $\vec{n}$  und  $\vec{A} \times \vec{n}$  aufgespannte Ebene) durch zwei Geraden begrenzt.

$$g_{1,2}(x) = x \cdot \tan \delta \pm \frac{l}{2} \quad (\text{Gl. C.26})$$

Für einen Strahl von der Quellenmitte mit einem Winkel  $\xi$  zur Normalen gilt folgende Gleichung:

$$s_{1,2}(x) = \pm (\tan \xi \cdot x) \quad (\text{Gl. C.27})$$

Die kritische Grenzlänge folgt aus den Schnittpunkten von g und s:

$$xs_{1,2} = \frac{l}{2(\tan \delta \pm \tan \xi)} \quad (\text{Gl. C.28})$$

Und damit

$$L_c(\delta, \xi) = \sqrt{(xs_{1,2})^2 + s_{1,2}(xs_{1,2})^2} =$$

$$= \frac{l}{2(\tan \delta \pm \tan \xi)} \cdot \sqrt{1 \pm (\tan \xi)^2} \quad (\text{Gl. C.29})$$

Die Projektion von  $\vec{T}$  erhält man über:

$$pr\vec{T} = \vec{n} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) + (\vec{A} \times \vec{n}) \cdot (\vec{T} \cdot (\vec{A} \times \vec{n})) \quad (\text{Gl. C.30})$$

mit 
$$\vec{T} = Tl \cdot \vec{d}' \quad (\text{Gl. C.31})$$

$Tl$  ist der Abstand vom Wandelement bis zur Mitte der Lichtquelle.

Man erhält für den Betrag:

$$|Pr\vec{T}| = Tl \cdot \sqrt{(\vec{d}' \cdot (\vec{A} \times \vec{n}))^2 + (\vec{d}' \cdot \vec{n})^2} \quad (\text{Gl. C.32})$$

und für  $\xi$ :

$$\cos \xi = \frac{pr\vec{T} \cdot \vec{n}}{|pr\vec{T}|} \quad (\text{Gl. C.33})$$

Zur Bestimmung des Winkels  $\alpha$  fehlt noch ein Ausdruck für  $\vec{T}_{eff}$ . Über den Sinussatz folgt der eigentliche Abstrahlort: (siehe Abb. C.3)

$$|\vec{T}_{rueck}| = \frac{\sin(\xi - \delta)}{\sin(\pi/2 + \delta)} \cdot |Pr\vec{T}| \quad (\text{Gl. C.34})$$

und damit:

$$\vec{T}_{rueck} = \mp (\vec{A} \times \vec{n}) \cdot |\vec{T}_{rueck}| \quad (\text{Gl. C.35})$$

Für  $\vec{T}_{eff}$  ergibt sich damit:

$$\vec{T}_{eff} = (\vec{T} - pr\vec{T}) + (pr\vec{T} + \vec{T}_{rueck}) = \vec{T} + \vec{T}_{rueck} \quad (\text{Gl. C.36})$$

Und schließlich für  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{T}_{eff} \cdot \vec{n}_{wand})}{|\vec{T}_{eff}|} \quad (\text{Gl. C.37})$$

Damit sind alle relevanten Größen bekannt. Diese werden zur Programmlaufzeit für den aktuellen Strahl jeweils neu bestimmt und ermöglichen damit die Simulation des speziellen Abstrahlverhaltens der Lichtlenkprofile.

## Literaturverzeichnis

Aus einem Buch abschreiben gibt : ein Plagiat  
Aus zwei Büchern abschreiben gibt : ein Essay  
Aus drei Büchern wird : eine Doktordissertation  
Aus vier Büchern : ein fünftes, gelehrtes Buch

Roda Roda

(aus Adalbert Duschek "Höhere Mathematik")

- [*Apfel* – 87] J. Apfelbaum; O. Bergshtein  
A solar radiation distribution sensor  
Solar Energie Vol. 39 (1-10); 1987
- [*Apian* – 90] P. Apian-Bennewitz  
Bau einer Apparatur zur Messung winkelabhängiger Licht-Streuung  
an anisotropen Materialien  
Diplomarbeit Universität Freiburg 1990
- [*Berg* – 77] L. Bergmann; C. Schaefer  
Lehrbuch der Experimentalphysik; Band 3; Optik  
Walter de Gruyter Berlin New York 1978
- [*Born* – 85] M. Born; E. Wolf  
Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light  
Sixth edition; Pergamon Press ... 1985
- [*Bronstein*] N. Bronstein ; K. A. Semendjadjew  
Ergänzende Kapitel zu Bronstein - Semendjadjew  
Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch ; Thun und Frankfurt (Main) 1991
- [*Coura* – 68] R. Courant; D. Hilbert  
Methoden der mathematischen Physik  
Berlin: Springer 1968
- [*dtv – Math*] H. Reinhardt; H. Soeder  
dtv-Atlas zur Mathematik; Tafeln und Texte  
Deutscher Taschenbuch Verlag 1977
- [*ftikreg*] J. Weese  
Ein Fortran-Programm zur Lösung von  
Fredholmschen Integralgleichungen erster Art  
Freiburger Materialforschungszentrum
- [*Haken* – 80] H. Haken  
Licht und Materie Band 1 und 2  
Bibliographisches Institut, 1980

- [*Haem* – 85] M. Hämäläinen; P. Nurkkanen; T. Slaen  
A multisensor pyranometer for determination of the direct component  
and angular distribution of solar radiation  
Solar Energie Vol. 35 (511-525); 1985
- [*Hans* – 72] R. J. Hanson  
Integral equations of immunology  
Communications of the ACM  
Vol 15; No.10; October 1972
- [*Hans* – 74] R. J. Hanson; C. L. Lawson  
Solving least squares problems  
Prentice Hall series in automatic computation 1974
- [*Hilbert*] D. Hilbert; E. Schmidt  
Integralgleichungen mit unendlich vielen Unbekannten  
Nachdruck Leipzig: teubner 1989
- [*Hulst* – 81] H.C. van de Hulst  
Light scattering by small particles  
Dover Publications, Inc. New York 1981
- [*Kelo* – 02] O.D. Kellogg  
Zur Theorie der Integralgleichung und des Dirichlet'schen Prinzips  
Göttingen: Univ. ; Philosophische Fakultät Dissertation 1902
- [*Klein* – 88] M.V. Klein; T.E. Furtak  
Optik  
Springer-Verlag; Berlin Heidelberg New York 1988
- [*Koest* – 80] H. Köster  
Vorrichtung zur automatischen Steuerung des Sonnenlichteinfalls  
Patentschrift; Veröffentlichungsnummer WO 80/02712; 11.12 1980
- [*num – recip*] W.H. Press; B.P. Flannery; S.a. Teukolsky; W.T. Vetterling  
Numerical reipes in C; The art of scientific computing  
Cambridge university press 1988
- [*Slaen* – 83] T. Slaen  
A method for computing the angular distribution  
of solar radiation from multipyranometer observations  
Proc. ISES Congress, Perth. Aug. 1983; Vol. 4; 2189-9-2193
- [*Stoer* – 71] J. Stoer  
On the numerical solution of costrained least-square problems  
SIAM J. Numer. Anal. Vol. 8., No. 2, June 1971
- [*Stoer* – 79] J. Stoer  
Einführung in die numerische Mathematik 1  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New york 1979

- [2mey – 67] S.Twomey; H. B. Howell  
Some aspects of the optical estimation of microstructure in fog and cloud  
Applied Optics Vol. 6, No.12 Dezember 1967
- [2mey – 74] S.Twomey  
Information content in remote Sensing  
Applied Optics Vol. 13, No.4 April 1974
- [2mey – 77] S.Twomey  
Introduction to the mathematics of inversion  
in remote sensing and indirect measurements  
Elsevier Scientific Publishing Company  
Amsterdam Oxford New York 1977
- [Volterra] V. Volterra ; M. Tomassetti ; F.-S. Zarlatti  
Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles  
Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire du bureau des Longitudes,  
de l'Ecole Polytechnique 1913
- [Weese – 89] J. Weese  
Die Lösung eines schlecht gestellten Problems aus der Rheologie mit Hilfe  
der Tikhonov-Regularisierung  
Diplomarbeit Universität Freiburg 1989
- [Weese – 91] J.Weese  
A reliable and fast method for the solution of Fredholm integral  
equations of first kind based on Tikhonov regularization  
Computer Physics Communication 69(1992) 99-111

### Bemerkungen zur Notation

1. Die mathematische Formulierung ist nicht streng; unter anderem keine Unterscheidung von Vektoren und Komponenten-Vektoren
2. Die Summations-Indizes sind durchweg unten notiert; ohne Rücksicht auf mögliches unterschiedliches Transformationsverhalten.
3. Bis auf Kapitel 4.2.1 wird bei Summationen die Einsteinsche Konvention benutzt: über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Die Indexmengen ergeben sich dann aus dem Zusammenhang.
4. Schreibweise für Vektoren und Matrizen:

$\vec{b}, \mathbf{G}$  sind Gesamt-Vektor bzw. Matrix

$b_s, \mathbf{G}_{s,t}$  sind die entsprechenden Komponenten

$\vec{b}_s$  ist der s-te Vektor mit Komponenten  $(\vec{b}_s)_t = b_{s,t}$

Zu guter letzt noch Dank an einige Leute, ohne die diese Arbeit in der vorliegenden Form nicht zustande gekommen wäre:

Dank<sup>1</sup>

an Peter Apian-Bennwitz

für Kaffee, Kekse, (xy)mountain, so manches gemeinsame Guinness, Lorient und Gaston, die großartige Rechnerbetreuung, für Dinge wie<sup>2</sup> ps2rle = gs -dQUIET -dNOPAUSE -sOUTPUTFILE="\$2.ppm" -sDEVICE=ppmraw -g1000x1414 -r121 \$1 < /dev/null und so hübsche C-Zeilen wie "while ((fscanf(fpr,"%[^\n]%"\*[\n\r]", string)) != EOF).....,

an Dr. Volker Wittwer

für die Möglichkeit, in seiner Abteilung diese Arbeit zu schreiben, für die überaus liberale und freie Arbeitsbedingung und die klärenden Gespräche bei offenen Fragen,

an Max Kubierschky

für zahlreiche Diskussionen über Invertierungsfragen und den Voltteraschen Ansatz zur analytischen Lösung der Integralgleichung,

an Jürgen Weese und den anderen Mitarbeitern im Freiburger Materialforschungszentrum für Überlassung des Programms zur Thikonov-Regularisierung und die diesbezüglichen, fruchtbaren Gespräche,

an Prof. Dr. A. Goetzberger

für die Durchsicht dieser Arbeit,

an Stefan Jankowski

für das Inventar des Testraums bei Tageslicht-Simulation,

an Natalie Damm

für interessiert und engagiertes Korrekturlesen,

an Prof. Dr. Friedrich Krause,

der mich durch seine einmaligen und unkonventionellen Vorlesungen und das Engagement für seine Studenten an der Universität Wuppertal methodisch entscheidend beeinflusst hat,

an Dr. Helen Rose Wilson

für wichtige Literaturhinweise im Zusammenhang mit Invertierungsfragen bei der Auswertung von Multipyranometer-Messungen und sonstige ergiebige Diskussionen,

an die Leute der Abteilung Kollektorentwicklung wie

Andreas Haerberle, Rolf Stangl, Volker Diegmann, Jutta Beyer, Werner Platzer...

für die Gespräche zu Detailfragen,

und nicht zuletzt an meine Mutter und meine Oma,

die mir die äußeren Bedingungen für ein Studium ohne moralischen oder finanziellen Druck geschaffen haben.

---

1. Wenn man nach einem Kriterium für die Reihenfolge sucht, es gibt es nicht ...

2. ps2rle stellt wie der Name schon sagt eine Konvertierung von Postscript in ein rle-Rasterbild dar.